2. Гармонический осциллятор

Гармоническими называются колебания, совершающиеся по закону синуса или косинуса. Систему, совершающую одномерные гармонические колебания, называют линейным гармоническим осциллятором. В механике под гармоническим осциллятором чаще всего понимают материальную точку, колеблющуюся около положения равновесия. Далее покажем, что и многие другие физические процессы описываются этой моделью.

Смещение гармонического осциллятора от положения равновесия запишем в виде

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда колебаний, а ω_0 – циклическая частота. Аргумент гармонической функции называется фазой, фаза в начальный момент времени равняется φ_0, и называется – начальной фазой.

Наряду с циклической частотой ω_0, которая определяет число колебаний за 2π секунды, можно определить частоту ν_0, число колебаний совершаемых за одну секунду

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0.$$

Тогда период колебаний (время одного колебания)

$$T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Частота измеряется в герцах.

Определим мгновенную скорость (первую производную по времени) и мгновенное ускорение (вторую производную по времени) от смещения

$$V = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Преобразуем последнее выражение $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, тогда

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Уравнение, содержащее вторую производную и не содержащее свободного члена, называется однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Это уравнение называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний. Его физический смысл заключается в том, что оно является уравнением движения, определяющим, как изменяется смещение материальной точки со временем. Под x следует понимать функцию $x = x(t)$, являющуюся решением дифференциального уравнения. Функция называется решением дифференциального уравнения, если подстановка ее в уравнение обращает его в тождество. Решением дифференциального уравнения гармонических колебаний является гармоническая функция. Это следует из самого способа построения уравнения принятого здесь.

Формула Эйлера, связывающая тригонометрические и экспоненциальные функции,

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha ,$$

позволяет представлять гармоническое колебание в комплексной форме

$$s(t) = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} .$$

Комплексная форма записи гармонических колебаний во многих случаях оказывается более удобной. Математические преобразования экспоненциальной функции проще, чем преобразования тригонометрических функций.