## *3. Пружинный маятник*

Закрепим один конец пружины, а к другому концу прикрепим тело (шар) массой *m*, Рис. 1. В дальнейшем тело будем считать материальной точкой. Пусть ось координат *x* направлена вдоль пружины, а начало координат совпадает с положением материальной точки в случае недеформированной пружины.

Если сместить материальную точку вдоль оси *x* и отпустить, то со стороны пружины на нее будет действовать упругая сила. Эта сила стремится вернуть материальную точку в положение равновесие. Закон Гука гласит, что при небольших растяжениях пружины сила пропорциональна растяжению и направлена в сторону противоположную смещению. Тогда

$$F = -kx,$$

где постоянная $k$ – жесткость пружины.

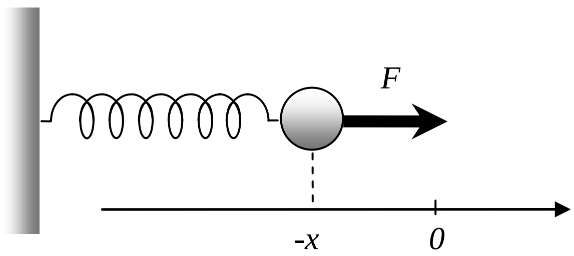


Рис. 1

Однако, по второму закону Ньютона, ускорение, с которым движется материальная точка, пропорционально действующей на нее силе,

$$F = ma.$$

Ускорение $a$, есть вторая производная от смещения по времени, $a = \ddot{x}$. Объединяя второй закон Ньютона и закон Гука, запишем, что $m\ddot{x} = -kx$. Преобразуя, и делая замену $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, сведем полученное выражение к уравнению

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1), содержащее вторую производную и не содержащее свободного члена, называется однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Его физический смысл заключается в том, что оно является уравнением движения, определяющим, как изменяется смещение материальной точки со временем. Таким образом, под $x$ следует понимать функцию $x = x(t)$, являющуюся решением дифференциального уравнения (1). Функция называется решением дифференциального уравнения, если подстановка ее в уравнение обращает его в тождество.

Допустим, что смещение изменяется со временем по гармоническому закону

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{2}$$

Определим мгновенную скорость (первую производную по времени) и мгновенное ускорение (вторую производную по времени)

$$V = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Подставляя функцию (2) и ее вторую производную в уравнение (1), убеждаемся, что оно обращается в тождество при любых значениях времени. Таким образом, приходим к утверждению, что решением уравнения (1) является гармоническая функция, а движения пружинного маятника будут представлять собою гармонические колебания. Поэтому уравнение (1) называют уравнением свободных гармонических колебаний.

Рассмотрим решение (2). Множитель $A$ – это амплитуда колебаний, аргумент гармонической функции называется фазой, фаза в начальный момент времени равняется $\varphi_0$, это начальная фаза, $\omega_0$ – циклическая частота.

Если циклическая частота $\omega_0$ определяется свойствами маятника, то амплитуда и начальная фаза зависят от того, каким образом колебания возбуждались (начальных условий). Для случая, приведенного на Рис. 1, начальные условия записываются так: $x(0) = -A$, $V(0) = 0$.

Однако, это не единственный способ возбуждения колебаний. Пусть маятник покоится. Кратковременное приложение силы (удар) вдоль оси $x$ в начальный момент времени также заставит маятник колебаться. Тогда начальные условия записываются так: $x(0)=0$, $V(0)=V_0$.

Колебания, совершающиеся под действием внутренних сил за счет первоначально полученной энергии, называются собственными (свободными). Поэтому циклическая частота $\omega_0$ называется собственной частотой маятника.

Наряду с циклической частотой $\omega_0$, которая определяет число колебаний за $2\pi$ секунды, можно определить частоту $\nu_0$, число колебаний совершаемых за одну секунду

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 .$$

Тогда период колебаний (время одного колебания)

$$T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} .$$

Определим кинетическую и потенциальную энергию маятника

$$E_k = \frac{mV^2}{2},\ E_p = \frac{kx^2}{2} .$$

Подставив смещение и скорость, проделав тригонометрические преобразования, получим выражения для энергии в симметричной форме

$$E_k = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left(1+\cos 2\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)\right),\ E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left(1-\cos 2\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)\right).$$

Кинетическая и потенциальная энергии совершают гармонические колебания около среднего значения с удвоенной частотой, Рис. 2.

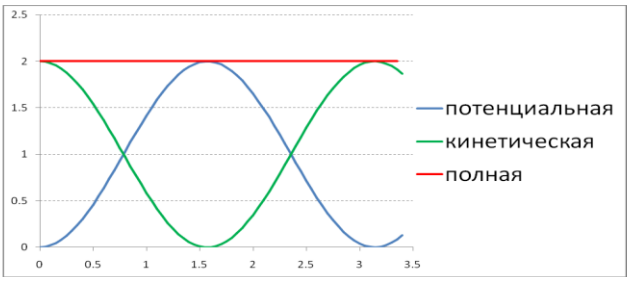


Рис. 2

Эти колебания осуществляются в противофазе, когда кинетическая энергия максимальна, потенциальная равна нулю, и наоборот. Полная энергия маятника при этом не меняется

$$E_k + E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Результат вполне ожидаем. Действительно, анализ движения маятника основывался на предположении об отсутствии потерь энергии (действующие силы консервативны). Поэтому, в соответствии с законом сохранения энергии, полная механическая энергия остается постоянной.

Колебания многих систем описываются уравнением свободных гармонических колебаний (1), а значит, для них остаются справедливыми отмеченные выше закономерности.