3. Пружинный маятник

Закрепим один конец пружины, а к другому концу прикрепим тело (шар) массой *m,* Рис. 1. В дальнейшем шар будем считать материальной точкой. Пусть ось координат *x* направлена вдоль пружины, а начало координат совпадает с положением материальной точки в случае недеформированной пружины.

Если сместить материальную точку вдоль оси *x* и отпустить, то со стороны пружины на нее будет действовать упругая сила. Эта сила стремится вернуть материальную точку в положение равновесие. Закон Гука гласит, что при небольших растяжениях пружины сила пропорциональна растяжению и направлена в сторону, противоположную смещению. Тогда

$$F = -kx\,,$$

где постоянная k – жесткость пружины.

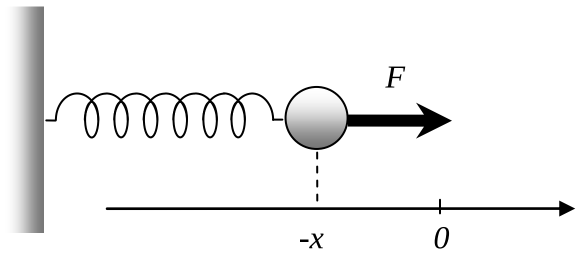

Рис. 1

Однако, по второму закону Ньютона ускорение, с которым движется материальная точка, пропорционально действующей на нее силе,

$$F = ma\,.$$

Ускорение a есть вторая производная от смещения по времени, $a = \ddot{x}$. Объединяя второй закон Ньютона и закон Гука, запишем, что $m\ddot{x} = -kx$. Преобразуя и делая замену $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, сведем полученное выражение к уравнению

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

Данное уравнение есть уравнение свободных гармонических колебаний (1). Его решение – гармоническая функция. Поэтому смещение изменяется со временем по гармоническому закону

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (2)$$

Также как и мгновенная скорость и мгновенное ускорение

$$V = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Такой гармонический осциллятор называется пружинным маятником.

Рассмотрим решение (2). По сути, оно представляет собой множество решений. Три независимых параметра индивидуализируют колебания осциллятора, это: множитель A – амплитуда колебаний, φ_0 – начальная фаза, ω_0 – собственная циклическая частота. Циклическая частота определяется свойствами маятника, а амплитуда и начальная фаза зависят от того, каким образом колебания возбуждались. Для случая, приведенного на Рис. 1, в начальный момент времени $x(0) = -A$, $V(0) = 0$. Эти условия называются начальными.

Начальные условия позволяют выбрать из множества решений одно единственное согласно которому будут совершаться колебания.

Возможен иной способ возбуждения колебаний. Пусть маятник покоится. Кратковременное приложение силы (удар) вдоль оси x в начальный момент времени также заставит маятник колебаться. Тогда начальные условия записываются так: $x(0) = 0$, $V(0) = V_0$.

Произвольное сочетание этих двух способов воздействия на маятник также заставят его колебаться. В любом случае причиной колебаний будет та энергия которую передали осциллятору.

Колебания, совершающиеся под действием внутренних сил за счет первоначально полученной энергии, называются собственными (свободными). Поэтому циклическая частота ω_0 называется собственной частотой маятника.

Определим кинетическую и потенциальную энергию маятника

$$E_k = \frac{mV^2}{2}, \; E_p = \frac{kx^2}{2}.$$

Подставив смещение и скорость, проделав тригонометрические преобразования, получим выражения для энергии в симметричной форме

$$E_k = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left(1+\cos 2\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)\right),\ E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left(1-\cos 2\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)\right).$$

Кинетическая и потенциальная энергии совершают гармонические колебания около среднего значения с удвоенной частотой, Рис. 2.

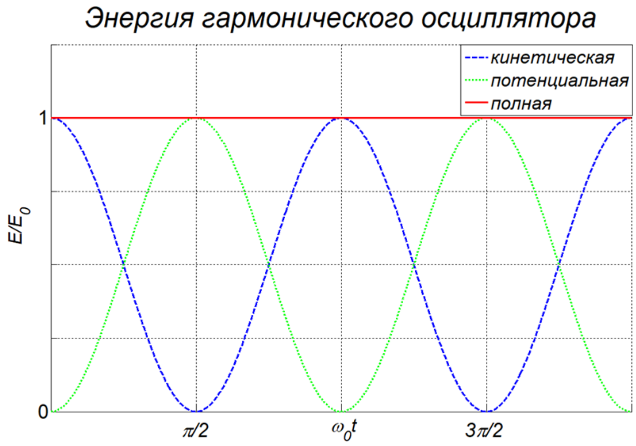

Рис. 2

Эти колебания осуществляются в противофазе, когда кинетическая энергия максимальна, потенциальная равна нулю, и наоборот. Полная энергия маятника при этом не меняется

$$E_0 = E_k + E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Результат вполне ожидаем. Действительно, анализ движения маятника основывался на предположении об отсутствии потерь энергии (действующие силы консервативны). Поэтому в соответствии с законом сохранения энергии полная механическая энергия остается постоянной.

Колебания многих систем описываются уравнением свободных гармонических колебаний (1), а значит, для них остаются справедливыми отмеченные выше закономерности.