5. Математический маятник

Тело массой m подвешено на нити длиною l, Рис. 4. Если размером тела можно пренебречь по сравнению с длиною нити l, то тело можно считать материальной точкой. Предположим, что нить невесома и нерастяжима. Такая идеализированная конструкция называется математическим маятником.

Отклоним маятник от положения равновесия на малый угол. Положение маятника полностью определяется углом α между нитью и вертикалью. Если маятник отпустить, то он начнет двигаться, причем траектория движения будет окружностью.

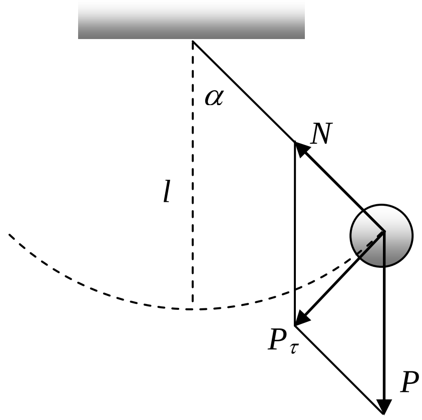

Рис. 4

В соответствии с первым законом Ньютона причиной начала движения маятника является сила, действующая на него. Рассмотрим действующие силы подробнее.

На материальную точку действуют две силы. Сила тяжести $P = mg$, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити N, направленная по нити. Их векторная сумма определяет тангенциальную составляющую силы тяжести

$$\vec{P}_\tau = \vec{N} + \vec{P},$$

которая и приводит материальную точку в движение. Эту силу можно назвать возвращающей, она стремится вернуть маятник в положение равновесия. Заметим, что нормальная составляющая силы тяжести (на рисунке не приведена) уравновешивается силой натяжения нити и радиальное движение отсутствует.

Угол между силой натяжения нити и тангенциальной составляющей силы тяжести прямой, поэтому $P_\tau = -mg\sin\alpha$. Знак минус берется потому, что угол α отсчитывается от вертикали против часовой стрелки, а сила P_τ направлена в противоположном направлении.

Для малых углов, выраженных в радианах, $\alpha \ll 1$, справедливо равенство $\sin\alpha \approx \alpha$. Тогда возвращающая сила

$$P_\tau \approx -mg\alpha . \tag{3}$$

Если расположить начало декартовой системы координат в точке равновесия тела, то, как легко заметить, $x = l\sin\alpha \approx l\alpha$.

Учитывая, что источником движения маятника выступает возвращающая сила, запишем второй закон Ньютона для материальной точки

$$P_\tau = ma_\tau .$$

Подставляя в это уравнение возвращающую силу (3) и тангенциальное ускорение в виде $a_\tau = \dot{V} = l\ddot{\alpha}$, получаем, что уравнение движения математического маятника является дифференциальным уравнением гармонических колебаний

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0,$$

при этом циклическая частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Период колебаний математического маятника не зависит от массы материальной точки и амплитуды колебаний, а определяется лишь длиною нити и ускорением свободного падения

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Этот же результат можно получить, если рассматривать математический маятник как частный случай физического. Действительно, момент инерции материальной точки $J = ml^2$, тогда

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J} = \frac{mgl}{ml^2} = \frac{g}{l} .$$

Длина нити и период маятника могут быть измерены с высокой точностью, это позволяет использовать колебания маятника для измерения ускорения свободного падения.

Колебания математического маятника оказались гармоническими лишь при условии малости угла отклонения. В этом случае возвращающая сила P_τ становится схожей с силой Гука. Она также линейна относительно перемещения и направлена в противоположную сторону. Такой вид возвращающей силы позволил свести уравнение движения к дифференциальному уравнению гармонических колебаний.

Если условие малости углов отклонения математического маятника не выполняется, то маятник совершает колебания отличные от гармонических. В этом случае период колебаний зависит от их амплитуды.