7. Сложение колебаний одного направления

Пусть материальная точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях. Ограничимся случаем, когда эти колебания совершаются вдоль одного направления и с одинаковой частотой. Одна из возможных реализаций такого процесса приведена на Рис. 7. Пружинный маятник *2* колеблется относительно маятника *1*, также в свою очередь совершающего гармонические колебания.

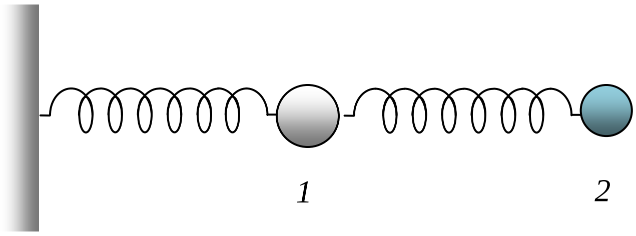

Рис. 7

Запишем эти колебания в виде

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1),\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Результирующее движение представим как $x = x_1 + x_2$. Используя тригонометрические соотношения, можно доказать, что результирующее колебание так же гармоническое и осуществляется на той же частоте

$$x = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Докажем это утверждение, а также найдем амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, используя метод векторных диаграмм.

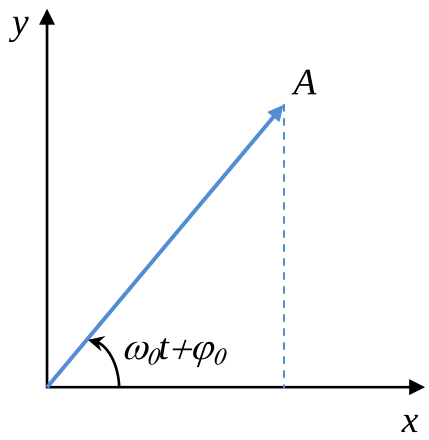

Рис. 8

Отложим из начала декартовой системы координат вектор, длина которого равняется амплитуде колебаний, Рис. 8. Пусть угол этого вектора с осью абсцисс равен фазе гармонического колебания $\omega_0 t + \varphi_0$. С течением времени фаза возрастает, и вектор равномерно вращается вокруг начала координат против часовой стрелки. Проекция этого вектора на ось ординат, как впрочем и на ось абсцисс, совершает гармонические колебания. Действительно,

$$A_y = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Векторные диаграммы дают наглядное представление гармонических колебаний и связывают колебательные и вращательные движения. Действительно, равномерное движение по окружности, по сути, есть два колебательных гармонических движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Колебанию x_1 в начальный момент времени на векторной диаграмме соответствует вектор A_1, отложенный под углом φ_1, а колебанию x_2 – вектор A_2, отложенный под углом φ_2, Рис. 9. Вращение векторов A_1 и A_2 с одинаковой частотой не меняет их взаимного расположения.

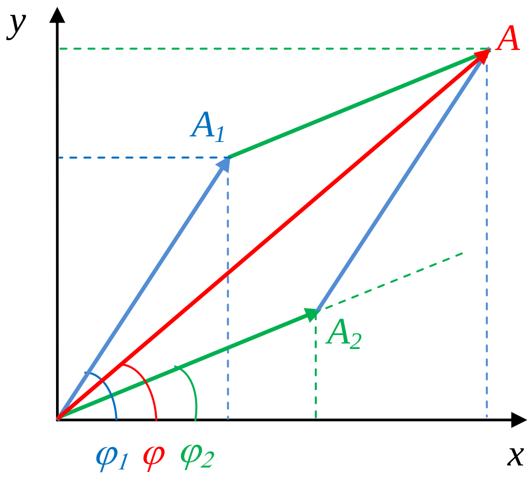

Рис. 9

Складывая вектора A_1 и A_2 по правилу параллелограмма, получаем вектор A, вращающийся совместно с ними. Следовательно, результирующее колебание осуществляется на той же частоте.

Начальную фазу результирующего колебания найдем, определив катеты треугольника,

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Амплитуду его можно найти по теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \varphi_1 + \varphi_2),$$

Или же

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Амплитуда зависит от начальных фаз складываемых колебаний. Рассмотрим несколько простых случаев. Пусть $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 2m\pi$, тогда $A = A_1 + A_2$. Совершаясь в одинаковой фазе (синфазно), колебания взаимно усиливаются, как это показано на Рис. 10.

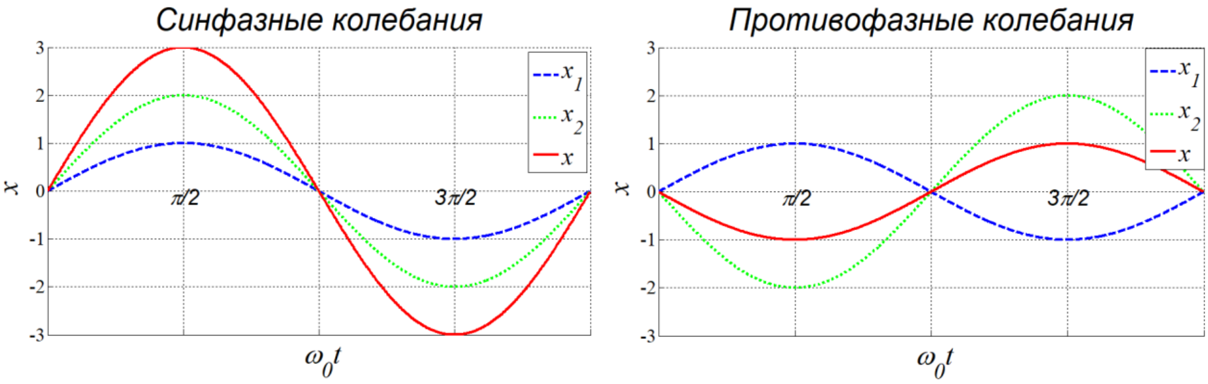

Рис. 10

Если же колебания совершаются в противофазе, $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm(2m+1)\pi$, то они ослабляются, $A = A_1 - A_2$, вплоть до полного гашения при, $A_1 = A_2$.