Элементы математического аппарата

Векторы и системы координат

Под вектором будим понимать направленный отрезок. Обозначение: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ или $\overline{AB} = \bar{a}$. Другим распространённым способом записи векторной величины является выделение символа жирным шрифтом: $\boldsymbol{a}$. Геометрически векторы изображается отрезками со стрелкой (см. рис. 1) и сопоставляется параллельному переносу. Например, вектор $\overrightarrow{AB}$, изображенный на рис. 1, определяет перенос, при котором точка A перейдет в точку B.

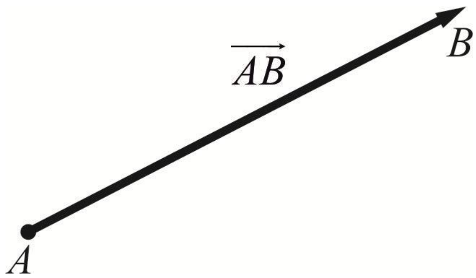

Рис. 1. Изображение вектора

Вектор в декартовой прямоугольной системе координат можно представить в виде:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные вектора (модуль единичного вектора равен единицы) или *орты*, a_1, a_2, a_3 – компоненты вектора.

Орты представляют собой систему линейно независимых векторов, это значит, что ни один из них нельзя представить в виде линейной комбинации остальных. Орты являются *базисом* в выбранной системе координат, то есть любой вектор в рассматриваемом пространстве может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации этих векторов. **Направление орт совпадает с направлением осей выбранной системы координат**. Если длинна (*норма*) орт принята за единицу, то базис называется *нормированный*, если орты взаимно перпендикулярны, то базис называется *ортогональным*, при выполнении обоих условий базис называется *ортонормированным*.

Базис является основой системы координат. *Система координат* – это способ задания положения точек в пространстве. Система координат является системой идентификации точек в системе отсчета. **Положение**

любой точки (или вектора) однозначно определяется её координатами. Это значит, что не может быть двух точек с одинаковыми координатами. Совокупность чисел, определяющих положение конкретной точки, называется *координатами* этой точки.

Существуем множество различных систем координат (например, прямоугольная, полярная, сферическая, цилиндрическая, аффинная (косоугольная) и другие системы координат). Выбор системы координат определяется удобством использования в конкретной задаче.

Также неотъемлемой частью системы координат являются координатные оси. *Координатные оси* (*числовые оси*) – это прямые, на которых лежат базисные векторы (векторы репера), задающие положительной направление роста численного значения координат на этих прямых. Это значит, что если мы будем перемещаться вдоль координатной оси по направлению соответствующего базисного вектора, то наша координата, отсчитываемая на этой координатной оси, будет расти. Если наша координата уменьшается, то мы движемся против направления оси.

В прямоугольной системе координат за единицу принимают длину соответствующего базисного вектора. Тогда положение точки *M* на оси *OX* определяется числом, абсолютная величина которого равна длине отрезка *OM*, выраженному в выбранной единице длины (см. рис. 2). Координата точки положительна, если вектор $\overrightarrow{OM}$ сонаправлен с осью, и отрицательна, если в вектор $\overrightarrow{OM}$ направлен в противоположную сторону.

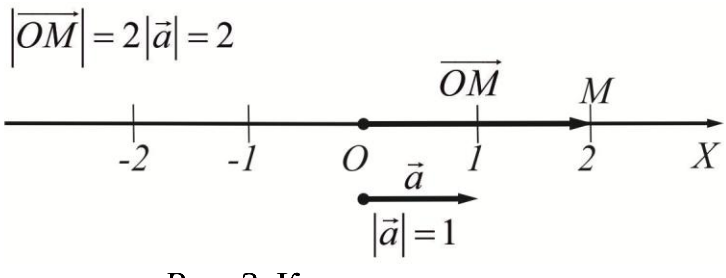

Рис. 2. Координатная ось

Начало координат отделяет положительные координатные числа (координаты) от отрицательных. Оси координат имеют специальные названия: *ось абсцисс, ось ординат* и *ось аппликат*, которые обычно обозначают *OX*, *OY*, *OZ* соответственно (см. рис. 3). Координаты точки называются *абсциссой,* *ординатой* и *аппликатой* и обозначаются как *x*, *y*, *z* соответственно. Координату точки в пространстве прямоугольной системы координат можно записать $A(x, y, z)$ или $A=(x, y, z)$.

Оси попарно образуют координатные плоскости. *Координатные плоскости* представляют собой геометрическое место точек, которые имеют общую неизменную координату. Координатные плоскости обозначатся *XOZ*, *YOZ*, *XOY*. Таким образом, любая точка *A* плоскости *XOY* имеет координаты $A(x, y, 0)$.

Все прямоугольные системы координат в трехмерном пространстве делятся на два класса – *правые* (*положительные*, *стандартные*) и *левые*.

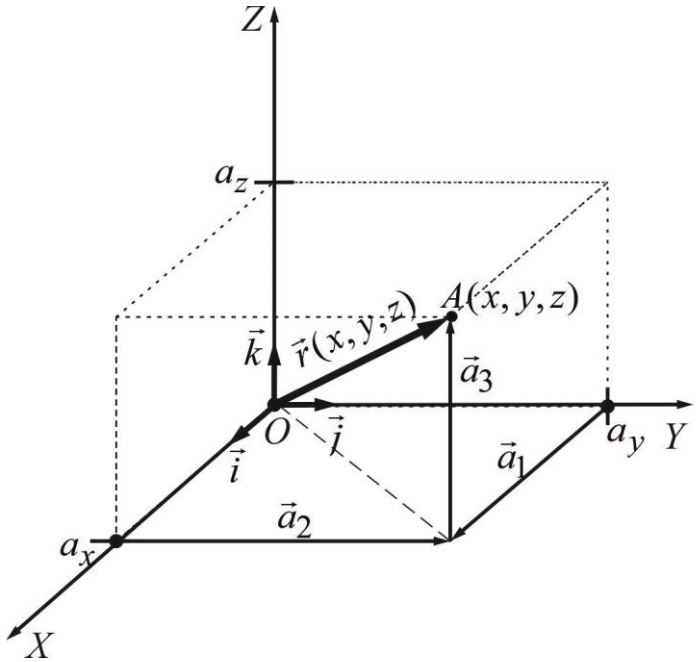

Рис. 3. Прямоугольная система координат

Для правой системы координат положительное направление осей выбирают так, чтобы при повороте оси *OX* против часовой стрелки на угол 90° её положительное направление совпало с положительным направлением оси *OY*, если этот поворот наблюдать со стороны положительного направления оси *OZ* (см. рис. 4, а).

В физике по умолчанию используют **правые координатные системы.**

Важным понятием, связанным с системой координат, является понятие радиус-вектора. *Радиус-вектор* точки *A* – это вектор $\overrightarrow{OA}$, проведенный из начала координат в рассматриваемую точку *A*. Обычно радиус-вектор обозначается $\vec{r}$. С помощью радиус-вектора можно задать положение точки в любой момент времени в выбранной системе отсчета.

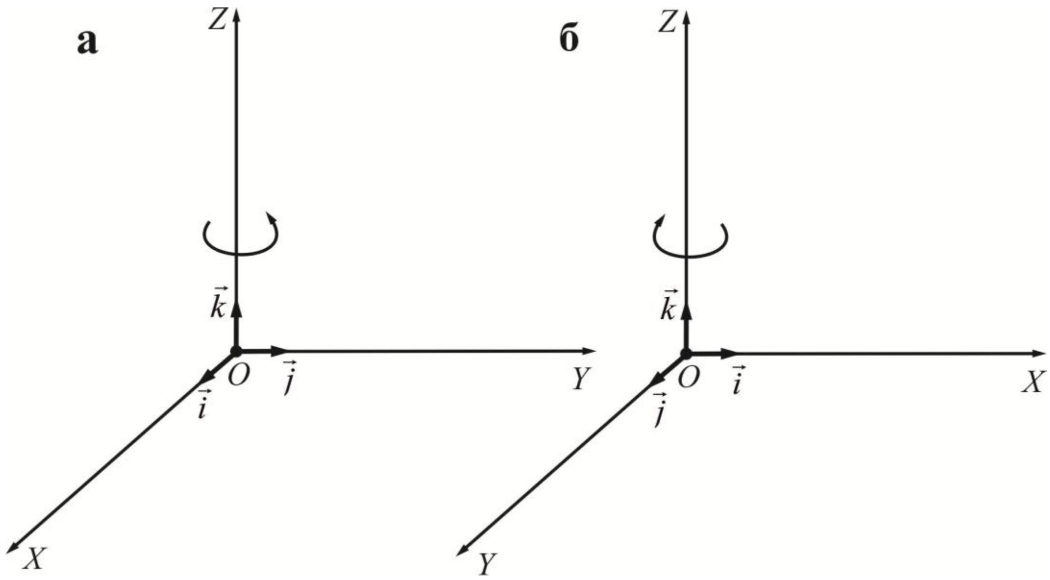

Рис. 4. Правую и левую системы координат: а – правая (правовинтовая) система координат; б – левая (левовинтовая) система координат

Важно отметить, что многие физические величины зависят от выбора системы отсчета, но ни одна физическая величина не зависит от выбора системы координат в данной системе отсчета. Необходимо понимать, что система координат, это только составная часть системы отсчета. Без тела отсчета бессмысленно вводить систему координат, поскольку указывать направление базисных векторов (направление координатных осей), как и любых векторов можно только относительно, чего-либо, в частности относительно тела отсчета. Также важно понимать, что сами векторы не могут быть положительны или отрицательны, поскольку нет положительных и отрицательных направлений.

Подытожив вышесказанной, можно сказать, что вектор без системы отсчета это всего лишь «отрезок со стрелкой». Поэтому рассматривать такой объект как вектор имеет смысл только в контексте, какой либо системы отсчета.

В трехмерном пространстве вектор можно представить в виде $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ или в прямоугольной системе координат вектор раскладывается по базису

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты прямоугольной системы координат, a_x, a_y, a_z – компоненты вектора или *проекции вектора* на оси *OX*, *OY*, *OZ* соответственно. Числа a_x, a_y, a_z также называют координатами вектора относительно базиса или *координатными компонентами вектора*, а произведения $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$, $a_3\vec{k}$ часто называют просто компонентами вектора,

Проекция подобна тени, отброшенной от предмета, освещенного лампой или солнцем. Поэтому подобно тому, как, в зависимости от расположения источника освещения и особенностей, распространяющихся от него лучей, можно получить разные тени, также можно получить и различные проекции: *центральную проекцию* и *параллельную проекцию*.

Если соединить все точки предмета лучами, сходящимися в точке *O*, которая называется *центр проекции*, то на пересечении этих лучей с какой-либо плоскостью получается *центральная проекция* всех точек предмета.

Если центр проекции бесконечно удалён от плоскости проецирования, то это *параллельная проекция*.

Параллельная проекция может быть *ортогональной*, когда проекционные лучи падают перпендикулярно к проекционной (картинной) плоскости, и косоугольной, когда проекционные лучи падают под углом, отличным от прямого угла, к проекционной плоскости.

Если плоскость проекции не параллельна ни одной из координатных плоскостей – это *аксонометрическая проекция*.

Проекция может быть не только на плоскость, но и из произвольного пространства на его подпространство. **Обычно под проекцией вектора на ось понимается ортогональная проекция**.

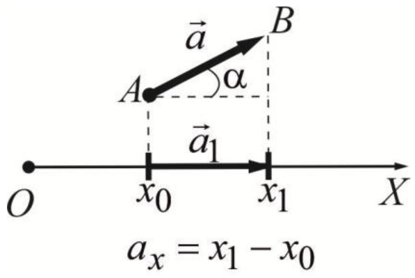

Рис. 5. Проекция вектора на ось *OX*

Геометрически спроецировать вектор на координатную ось означает спроецировать его начало и его конец, то есть опустить перпендикуляр, как показано на рис. 5, из начала и конца вектора на координатную ось. При этом проекцией вектора на ось обычно называют число, совпадающее по абсолютной величине с длиной отрезка, полученного при проецировании, и имеющее положительный знак, если компонента вектора параллельная оси сонаправлена с ней.

По сути, проекция вектора на направление оси есть скалярное произведение вектора на орт оси:

$$a_x = \vec{a}\vec{i} = |\vec{a}|\cos\alpha = x_1 - x_0,$$

$$a_y = \vec{a}\vec{j} = |\vec{a}|\cos\beta = y_1 - y_0,$$

$$a_z = \vec{a}\vec{k} = |\vec{a}|\cos\gamma = z_1 - z_0,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – косинусы углов наклона вектора $\vec{a}$ к соответствующим осям координат, называемые *направляющими косинусами*. Декартовы координаты вектора совпадают с его проекциями на соответствующие оси координат $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$.

Длина вектора (*модуль вектора*) равна

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Направляющие косинусы можно найти по формулам*:*

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}\ .$$

Радиус-вектор в прямоугольной системе координат может быть записан в виде:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ ,$$

Это уравнение связывает радиус-вектор с прямоугольными координатами.

Таким образом, координаты радиус-вектора являются координатами рассматриваемой точки, а зависимость радиус-вектора от времени описывает изменение положения тела со временем в пространстве.

Как уже упоминалась, существует множество различных систем координат, выбор среди которых зависит от удобства. Например, движение планет удобнее описывать в полярной или сферической системах координат.

В прямоугольной системе координат положение точки в трехмерном пространстве определяется тремя координатами (тройкой чисел), как показано на рис. 3.

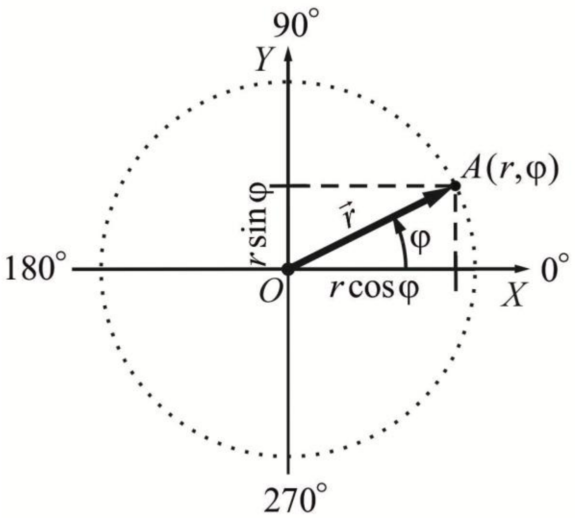

Рис. 6. Полярная система координат

Полярная система координат используется при рассмотрении движения объектов на плоскости. Положение точки A (см. рис. 6) определяется её расстоянием до начала координат $r = \left|\overrightarrow{OA}\right|$ и углом φ между направлением её радиус-вектора и направлением координатной оси.

Переход от полярных координат к прямоугольным осуществляется путём применения тригонометрических функций синуса и косинуса:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

В пространстве часто применяются цилиндрические и сферические системы координат.

В цилиндрической системе координаты (см. рис. 7) любой точки A пространства представляется упорядоченной тройкой r (радиус), φ (азимут или долгота), z (высота). $r \geq 0$ и определяет расстояние от оси ZO до точки A. $0 \leq \varphi < 360^\circ$ – угол между направлением оси OX и направлением вектора $\vec{a}_{12}$ (сумма компонент декартового радиус-вектора точки A по осям OX и

OY), расположенном в плоскости XOY. Высота z равна декартовой z-координате точки A.

Существенным недостатком полярных систем координат является тот факт, что значение φ не определено при $r = 0$. Цилиндрические координаты полезны для изучения систем, симметричных относительно некоторой оси. Например, уравнение окружности с радиусом R, лежащей в плоскости XOY, в декартовых координатах с началом отсчёта в центре окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$, тогда как в цилиндрических координатах оно существенно упрощается: $r = R$.

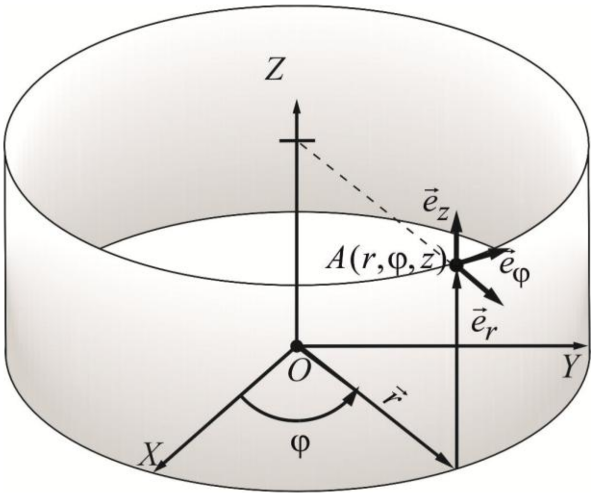

Рис. 7. Цилиндрическая система координат

Орты цилиндрической системы координат связаны с декартовыми ортами следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}, \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}, \\ \vec{e}_z = \vec{k}. \end{cases}$$

Таким образом, преобразования координат от цилиндрических к декартовым имеет вид:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

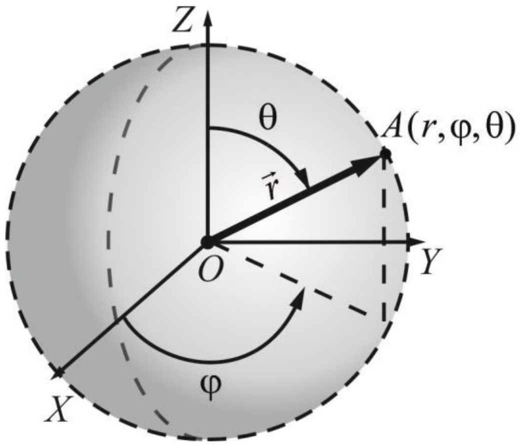

Рис. 8. Сферическая система координат

В сферической системе координат (см. рис. 8) расположение точки A определяется тремя компонентами: r (радиус), φ (азимут или долгота), θ (широта или полярный угол). $r \geq 0$ и определяет расстояние от точки A до начала координат (полюса). $0 \leq \varphi < 360^\circ$ – угол между направлением оси OX и направлением вектора $\vec{a}_{12}$ (сумма компонент декартового радиус-вектора точки A по осям OX и OY), расположенном в плоскости XOY. Широта $0 \leq \theta < 180^\circ$ – угол между направлением оси OZ и направлением вектора радиус-вектора точки A.

Отметим, что сферическая система координат имеет такой же недостаток, как и цилиндрическая и полярная системы координат – значение φ и θ не определены при $r = 0$. Также угол φ не определён для граничных значений $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$.

Если заданы сферические координаты точки, то переход к декартовым осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Операции над векторами

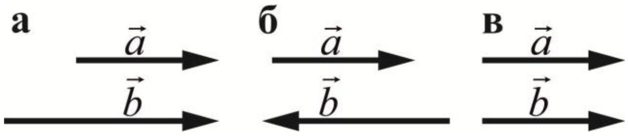

Рис. 9. Коллинеарные векторы: а – сонаправленные векторы; б – противоположно направленные векторы; в – равные векторы

Для изучения основ векторной алгебры необходимо ввести несколько понятий.

Векторы *коллинеарные,* если они параллельны одной прямой (см. рис. 9). Обозначаются: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ – коллинеарные векторы, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ – сонаправленные векторы (см. рис. 9, а), $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ – противоположно направленные векторы (см. рис. 9, б).

Вектора *одинаковы* (*равные*) если они сонаправлены и их модули равны, т. е. $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\left(\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|,\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\right)$ (см. рис. 9, в).

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, есть вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, определяемый по п*равилу треугольника* или по *правилу параллелограмма* (см. рис. 10).

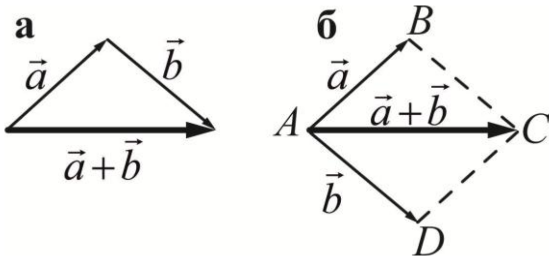

Рис. 10. Сложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а – по правилу треугольника; б – по правилу параллелограмма ($AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$, $AB=DC$ и $AD=BC$)

Разность векторов можно представить в виде $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})\Leftrightarrow\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ (см. рис. 11).

По сути, операция сложения векторов – это совокупность двух (или нескольких) последовательных параллельных переносов; то же касается и операции умножения вектора на число.

Произведением $C\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число C называется вектор $\vec{b}=C\vec{a}$. При этом $\left|\vec{b}\right|=\left|C\right|\left|\vec{a}\right|$, $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $C>0$, и $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$, если $C<0$.

Вектор модуль, которого равен нулю (начало вектора совпадает с его концом), называется *нулевым* вектором и обозначается $\vec{0}$.

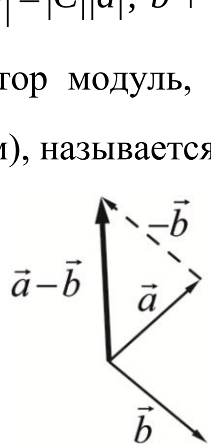

Рис. 11. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число (*скаляр*) $C=\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$$

где $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. **Скалярное произведение можно представить как произведение проекции вектора $\vec{a}$ (на направление вектора $\vec{b}$) на модуль вектора $\vec{b}$ или произведение модуль вектора $\vec{a}$ на проекцию вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$ (см. рис. 12)**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b \cdot \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot b_a$$

Из предыдущих соотношений получим следующие выражения

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})},\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|},\ b_a = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|}.$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$ – *свойство коммутативности*;

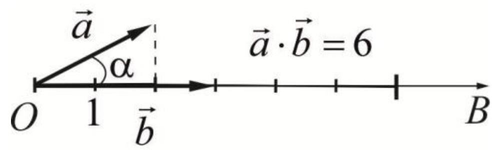

Рис. 12. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

2) $\left(C\vec{a}, \vec{b}\right) = C\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ – *сочетательное свойство*;

3) $\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right)$ – *свойство дистрибутивности*; 4) скалярный квадрат вектора всегда не отрицателен $\left(\vec{a}, \vec{a}\right) \geq 0$.

Скалярное произведение двух векторов в декартовом базисе равно сумме произведений **одноименных** координат:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Из определения следует, что скалярное произведение двух ортогональных (перпендикулярных) векторов равно нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

В физике многие величины определяются через скалярное произведение векторов. Например, работа A **постоянной потенциальной силы** $\vec{F}$ по перемещению материальной точки равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения $\Delta\vec{r}$:

$$A=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

По аналогии с правой и левой системой координат вводится понятие правой и левой тройки векторов. Упорядоченная тройка векторов $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ называется *правой*, если наблюдателю, находящемуся на конце вектора $\vec{c}$, кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден **против часовой стрелки,** при условии того, что векторы тройки приведены к общему началу (исходят из одной точки), иначе тройка $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ называется левой.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $\vec{c}\perp\vec{a},\,\vec{c}\perp\vec{b}$; 2) $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$; 3) тройка векторов $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ – правая. Векторное произведение обозначается: $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{b}$. **Векторное произведение не обладает свойствами коммутативности**. Оно является *антикоммутативным* в отличие от скалярного произведения.

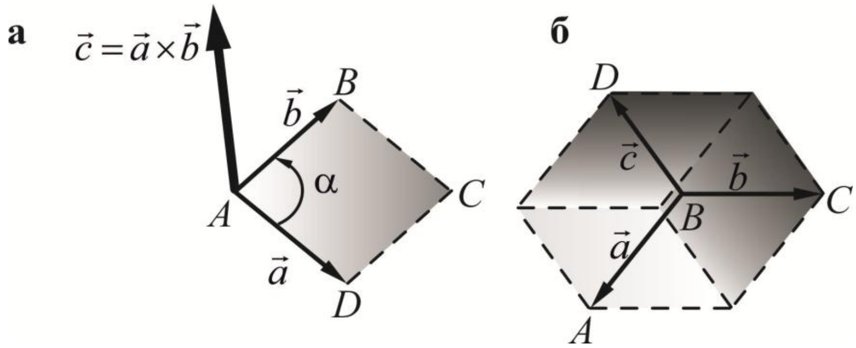

Рис. 13. Векторное и смешанное произведения векторов: а – векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\left|\vec{c}\right|=S_{ABCD}$); б – смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (объему параллелепипеда $V=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right|$)

Геометрический смысл векторного произведения заключается в том, что его модуль **численно** равен площади параллелограмма, образованного исходными векторами (см. рис. 13, а).

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ – *свойство антикоммутативности*;

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$; 3) $\left(C\vec{a}\times\vec{b}\right)=C\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$; 4) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\,||\,\vec{b}$ (условие коллинеарности векторов); 5) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, то есть $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, в декартовом базисе, то векторное произведение можно представить в виде *определителя*:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}\,.$$

Отметим особенность полученной формулы: индексы у a и b в скобках изменяются по схеме $x\to y\to z$ ($a_xb_y\to a_yb_z\to a_zb_x$).

Результатом **дойного векторного произведения** $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ является вектор, который можно найти по формуле:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\cdot(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}\cdot\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Эту формулу можно запомнить по мнемоническому правилу **«БАЦ минус ЦАБ»**.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярная величина, полученная в результате последовательного выполнения двух операций – векторного и скалярного умножения, – представленная выражением

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}$$

Смешенное произведение обозначается $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$**,** $\vec{b}$**,** $\vec{c}$ (см. рис. 13, б). Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$**,** $\vec{b}$**,** $\vec{c}$ **комплонарны.**

Смешанное произведение, векторы которого выражены в декартовом базисе, можно представить в виде определителя:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=a_x\left(b_y c_z-b_z c_y\right)+a_y\left(b_z c_x-b_x c_z\right)+a_z\left(b_x c_y-b_y c_x\right).$$

Векторы делятся на *полярные* и *аксиальные*.

Полярным (истинным) вектором называется такой вектор, который при замене ориентации системы отсчета на противоположную не меняется.

Аксиальным (от лат. *axis* – ось) вектором или *псевдовектором* называется вектор, который при замене ориентации системы отсчета на противоположную меняет свое направление на противоположное, сохраняя свою длину.

Все вектора, полученные в результате векторного произведения двух истинных векторов, являются аксиальными. При векторном умножении истинного вектора на псевдовектор получается истинный вектор.

Условно говоря, полярные вектора изображают в трехмерном пространстве трансляции, а аксиальные – вращения.

В механике многие физические величины являются аксиальными векторами, например, момент импульса, момент сил, угловая скорость и т. д.

3. Физический смысл производной

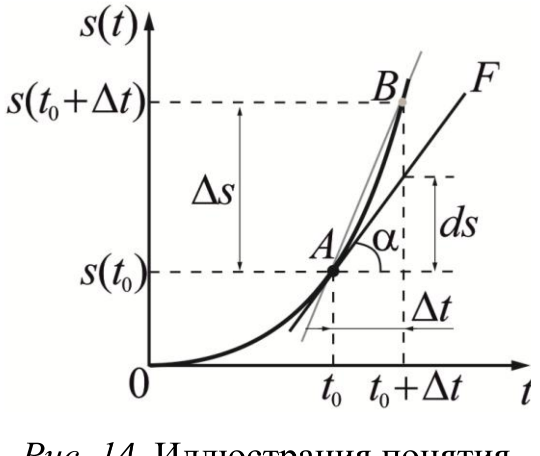

Рис. 14. Иллюстрация понятия производной

При изучении физики мы неизбежно сталкиваемся с дифференциальными и интегральными уравнениями.

Рассмотрим некоторую скалярную функцию, $s(t)$ изображенную на рис. 14. На рассматриваемой кривой отметим точку A с координатами t_0 и $s(t_0)$. Перемещаясь вдоль кривой $s(t)$, отметим точку $B\left(t_0+\Delta t,\, s(t_0+\Delta t)\right)$ и проведем через эти точки секущую *AB* (светло серая линия на рис. 14).

Разность координат по оси ординат $\Delta s = s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$ соответствует приращению функции $s(t)$, а по оси абсцисс – приращению аргумента функции Δt. Отношение $\Delta s/\Delta t$, по сути, равно **тангенсу угла наклона секущей** *AB*. Т. е. отношение $\Delta s/\Delta t$ можно представить как угловой коэффициент *прямой*, построенной так, чтобы при заданном изменении аргумента мы из точки *A* попали бы в точку *B*.

Также отношение $\Delta s/\Delta t$ (отношение изменения функции к изменению аргумента) можно интерпретировать, как среднюю скорость изменения функции на интервале от t_0 до $t_0+\Delta t$.

Таким образом, из вышесказанного следует, что **средняя скорость роста функции на участке между точками *A* и *B* равна скорости изменения линейной функции, являющейся секущей *AB*. Поэтому если зависимость $s(t)$ выражает зависимость пути, пройденного материальной точкой, от времени, то** $\Delta s/\Delta t = \langle v\rangle$, где $\langle v\rangle$ – *средняя путевая скорость.*

Будим постепенно приближать точку *B* вдоль кривой к точке *A*, при этом приращение аргумента функции Δt будет уменьшаться. При стремлении $\Delta t\to 0$, точка $B\to A$, а секущая *AB* переходит в касательную *F* к кривой $s(t)$ в точке *A*. Таким образом, касательная *F* в точке *A*, это предельное положение секущей *AB*, при $B\to A$.

Производной s' *функции в точке A* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю:

$$s' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

Тогда с геометрической точки зрения производная функции в точке численно равна тангенсу угла наклона касательной к этой точке.

Производная характеризует скорость роста функции в данной точке. Если вернуться к нашей аналогии**,** в которой $s(t)$ выражает зависимость пути**,** пройденного материальной точкой, от времени, то $s' = |\vec{v}|$, где $|\vec{v}|$ – модуль *мгновенной скорости* движения материальной точки, а s' – производная пути по времени.

Приращений функции Δs можно представить в виде $\Delta s = \mathrm{d}s + f(t)$ (см. рис. 14). При этом $\mathrm{d}s$ линейно связано с приращением аргумента Δt, а $f(t)$ характеризует нелинейную часть приращения функции. $\mathrm{d}s$ – *дифференциал функции* (линейная, относительно Δt, часть приращения функции). *Дифференциал аргумента* совпадает с его приращением $\mathrm{d}t = \Delta t$.

Обобщая вышесказанное, можно записать:

$$s' = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \text{ или } \mathrm{d}s = s'\mathrm{d}t.$$

В физике наиболее часто используется предложенное Г. Лейбницем обозначение производной $s' = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$**.**

Т. е. производная, по сути, является коэффициентом пропорциональности между дифференциалом функции и дифференциалом аргумента.

Отметим, что если $\mathrm{d}t \to 0$, то $\mathrm{d}s$ также стремиться к нулю. **Важно отличать понятие приращения функции** Δs **от её дифференциала** $\mathrm{d}s$. В общем случае дифференциал функции представляет собой функцию $\mathrm{d}s(\Delta t)$, линейно зависящую от Δt, для которой верно следующее соотношение:

$$\mathrm{d}s(\Delta t) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) + \alpha(\Delta t),$$

где α стремиться к нулю при $\Delta t \to 0$, причем α стремиться к нулю быстрее чем Δt. Получается, что при $\Delta t \to 0$, разность $(\mathrm{d}s - \Delta s) \to 0$, а ds принято называть дифференциалом функции в точке.

Функцию, имеющую конечную производную в некоторой точке, называют *дифференцируемой* в данной точке. Процесс вычисления производной называется *дифференцированием*. Обратный процесс – нахождение *первообразной* – *интегрирование*.

Производная может быть не только первого порядка (первая производная). Например, первая производная от радиус-вектора материальной точки по времени – это мгновенная скорость этой точки, а вторая производная (**производная от производной**) от радиус-вектора по времени равна ускорению материальной точки. Вторая производная обозначается как

$$(f')' = f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{d}^2 f \big/ \mathrm{d}x^2 .$$

Производная *n*-ой степени функции f обозначается как

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} = \mathrm{d}^n f \big/ \mathrm{d}x^n = f^{(n)}.$$

Отметим, что в физике принято записывать производную через отношение дифференциалов ($f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$). **Также для производной по времени принято обозначение** $\dot{f}$, т. е. $\dot{f} = \mathrm{d}f/\mathrm{d}t$, где t – это время. Вторая производная функции по времени обозначается как $\ddot{f}$.

Важно отметить, что в физике под дифференциалом аргумента понимают столь малое его приращение (**элементарное приращение**), чтобы разность между соответствующими значениями приращения функции и линейной части её приращения была **пренебрежимо мала** (малой высшего порядка малости по сравнению с приращением функции). **Выражение** $s' = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ **следует понимать не как отношение математических дифференциалов функции и аргумента или отношение бесконечно малых величин, а как отношение *элементарных* приращений функции и аргумента.** При этом все математические операции выполняются по правилам работы с дифференциалами.

Если функция дифференцируема на промежутке [*a*, *b*] и во внутренней точке *c* этого промежутка принимает наибольшее или наименьшее значение, то производная в этой точке равна нулю.

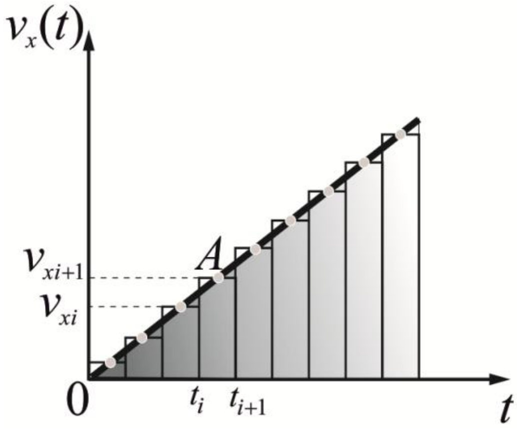

Рис. 15. Иллюстрация понятия интеграла

Мы упомянули такое понятие как *интегрирование* – вычисления различных интегралов. Интегрирование, это математическая операция, обратная дифференцированию. Кратко рассмотрим значение понятия *интеграл*.

Представим, что мы провели некоторое количество измерений i через равные промежутки времени скорости v прямолинейно движущегося в одном направлении тела. Отметим полученные точки на графике зависимости $v_x(t)$ (v_x – проекция скорости на направление движения), который представлен на рис. 15. Пусть перед нами стоит задача найти пройденный телом путь. Как мы уже упоминали $\Delta s/\Delta t = \langle v \rangle$, где $\langle v \rangle$ – средняя путевая скорость. Тогда $\Delta s = \langle v \rangle \cdot \Delta t$. Если предположить, что в интервале времени $[t_i, t_{i+1}]$ тело двигалось равномерно со средней скоростью $\langle v_x \rangle = v_{xi}$, то $s = \sum \Delta s_i = \sum v_i \cdot \Delta t$. Как можно видеть из рис. 14 произведение $v_i \cdot \Delta t = S$, где S – площадь прямоугольника, длинна сторон которого равна v_i и $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ соответственно. Тогда путь численно равен сумме площадей всех прямоугольников: $s = \sum S_i$. Если уменьшать промежутки времени между измерениями, то при $\Delta t \to 0$ площадь прямоугольников стремиться к нулю, а их число к бесконечности. В этом случае непонятно как провести суммирование всех площадей. Нам поможет то обстоятельство, что при $\Delta t \to 0$ средняя скорость переходит в мгновенную, $\Delta s \to \mathrm{d}s$ и мы имеем $\mathrm{d}s = v \cdot \mathrm{d}t$. Если для нахождения мгновенной скорости (**при определенных условиях**) необходимо взять производную по времени от пути (**в общем случае от радиус-вектора**), то, чтобы найти путь, необходимо совершить обратную операцию (обратная задача) – найти *первообразную* мгновенной скорости.

Например, первообразная от x равна $F(x) = x^2/2$, а производная от $F' = \left(x^2/2\right)' = x$. Если найти первообразную функции $v_x(t)$ в каждой точке и просуммировать по всему диапазону времени, то мы получим пройденный телом путь.

Таким образом, для нахождения пути пройденного телом нам необходимо ввести некоторый аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых, который называется *интегралом*:

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t,$$

где $\int$ – знак интеграла, $v(t)$ – *подынтегральная функция*, $\mathrm{d}t$ – *элемент интегрирования*, 0 и t расположенные под и над знаком интеграла – *пределы интегрирования*. Если пределы интегрирования указаны, то интеграл называется *определенным*, если пределы не заданы, то интеграл называется *неопределенным*.

Неопределенный интеграл можно записать как

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

где C – *постоянная интегрирования* (константа).

Определенный интеграл можно записать как

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

Эта равенство называется **формулой Ньютона-Лейбница**.

Упрощенно говоря, процесс интегрирования с одной стороны сводится к нахождению первообразных функции, а с другой стороны геометрический образ интеграла – это площадь под кривой $v_x(t)$ (см. рис. 15).