ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

Лекция №5

План лекции:

1. Политропные процессы
2. Работа и теплота политропного процесса
3. Исследование политропных процессов
4. Определение показателя политропы

1. ПОЛИТРОПНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Уравнения первого закона термодинамики для закрытой термодинамической системы, характеризуют распределение подведенной к газу (или отведенной) теплоты между его внутренней энергией и совершенной им работой.

$$dq = du + dl \tag{1}$$

В общем случае доли теплоты, расходуемые на работу и внутреннюю энергию, в термодинамическом процессе меняются в любых отношениях. В термодинамике же изучаются процессы, подчиненные определенной закономерности. В частности рассматриваются процессы, при протекании которых подводимая теплота распределяется между внутренней энергией газа и работой, которую он совершает, в постоянной пропорции.

Рассмотрим процесс, в котором на изменение внутренней энергии газа расходуется φ -ая часть подводимой теплоты. Соотношения будем записывать для 1 кг идеального газа.

$$du = \varphi dq \tag{2}$$

Уравнение первого закона термодинамики запишется следующим образом:

$$dq = \varphi dq + dl$$

или

$$dl = (1-\varphi)\,dq \tag{3}$$

В термодинамике процессы, подчиненные закономерности, выражаемой условием $\varphi = \text{const}$, называются политропными (греч. многообразными). Значение φ в политропных процессах могут быть от $+\infty$ до $-\infty$.

Теплота всегда может быть выражена произведением теплоемкости на изменение температуры. Для любого политропного процесса также можно написать

$$dq = c_{\varphi} dT \tag{4}$$

где c_{φ} - теплоемкость политропного процесса.

Следовательно,

$$c_{\varphi} = \frac{dq}{dT} = \frac{1}{\varphi}\frac{du}{dT} = \frac{c_v}{\varphi} \tag{5}$$

В политропном процессе идеального газа изменения параметров могут быть выражены определенными зависимостями. Получим их используя первый закон термодинамики, уравнение состояния идеального газа и свойства политропного процесса:

$$
\begin{aligned}
&dq = c_v dT + pdv \\
&p = \frac{RT}{v} \\
&dq = c_\varphi dT
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Подставляя $dq = c_\varphi dT$ в уравнение первого закона термодинамики, и выражая dT из уравнения состояния идеального газа $dT = (pdv + vdp)/R$, получим следующее соотношение:

$$
\begin{aligned}
&(c_\varphi - c_v)\,dT = pdv \\
&(c_\varphi - c_v)(pdv + vdp) = R \cdot pdv \\
&(c_\varphi - c_v - R)\,pdv + (c_\varphi - c_v)\,vdp = 0 \\
&(c_\varphi - c_p)\,pdv + (c_\varphi - c_v)\,vdp = 0 \\
&\frac{c_\varphi - c_p}{c_\varphi - c_v}\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Введём обозначение $n = (c_\varphi - c_p)/(c_\varphi - c_v) = \text{const}$, тогда из уравнения (7) получим:

$$
\boxed{n\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0}
\tag{8}
$$

Проведём интегрирование данного выражения:

$$
\begin{aligned}
&n\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v} = -\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} \\
&\ln(v_2^n) - \ln(v_1^n) = \ln(p_1) - \ln(p_2) \\
&\ln(p_1 v_1^n) = \ln(p_2 v_2^n) \\
&p_1 v_1^n = p_2 v_2^n
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Таким образом, для политропного процесса всегда выполняется условие:

$$
pv^n = \text{const}
\tag{10}
$$

Используя уравнение состояния идеального газа, можно перейти к записи данного условия через температуру и удельный объём газа:

$$
Tv^{n-1} = \text{const},
\tag{11}
$$

или через давление и температуру:

$$
\frac{T^n}{p^{n-1}} = \text{const}
\tag{12}
$$

Таким образом, зависимости, выражающие изменения параметров газа в политропном процессе, определяются введенной нами величиной n; эта величина называется **показателем политропы** и для каждого процесса постоянна.

2. РАБОТА И ТЕПЛОТА ПОЛИТРОПНОГО ПРОЦЕССА

Из определения общего интеграла работы:

$$l=\int_1^2 p\,dv \qquad (13)$$

для политропного процесса можно получить:

$$l=\int_1^2 \frac{p_1 v_1^n}{v^n}dv \qquad (14)$$

Интегрирование даёт следующее соотношение для работы политропного процесса:

$$l=p_1 v_1^n\int_1^2 v^{-n}dv=p_1 v_1^n\left(\frac{v_2^{1-n}-v_1^{1-n}}{1-n}\right)$$

или (15)

$$l=\frac{p_2 v_2-p_1 v_1}{1-n}$$

Используя уравнение состояния идеального газа выражение (15) можно преобразовать к виду:

$$l=\frac{R(T_2-T_1)}{1-n}, \qquad (16)$$

или через отношение давлений:

$$l=\frac{RT_1}{n-1}\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right). \qquad (17)$$

Последнее соотношение часто используется в газодинамике и теории турбин.

Теплота, подводимая в ходе политропного процесса, может быть легко определена исходя из теплоёмкости политропного процесса.

$$dq=c_\varphi dT$$

$$dq=c_v\frac{n-k}{n-1}dT$$

или (18)

$$q=c_v\frac{n-k}{n-1}\left(T_2-T_1\right)$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИТРОПНЫХ ПРОЦЕССОВ

Зависимости между параметрами, характеризующими процесс, могут быть определены или по заданному значению φ, или по известной величине показателя политропы n, или по известному значению теплоемкости процесса c_φ.

Основное значение для последующего изложения имеет показатель политропы n.

Исследование процессов при разных значениях n приводит к некоторым частным случаям политропных процессов, особо выделяемым при анализе термодинамических процессов.

Изобарный процесс.

$$pv^n = pv^0 = p = \text{const} \tag{19}$$

Таким образом, политропный процесс с показателем $n = 0$ протекает при постоянном давлении; этот процесс называется изобарным. Следовательно, меняются в процессе только температура газа и его объем, причем из уравнения состояния находим:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} \tag{20}$$

Работа газа в изобарном процессе определяется из выражений (15) и (16) как:

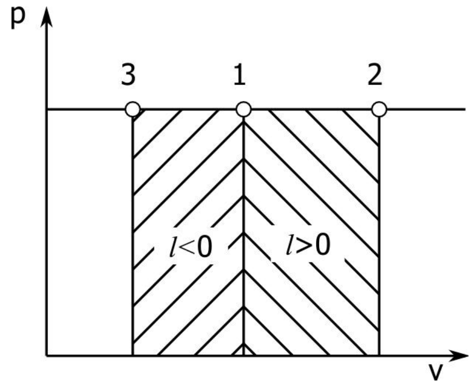
$$l = p\left(v_2 - v_1\right)$$
$$\text{или} \tag{21}$$
$$l = R\left(T_2 - T_1\right)$$

Теплота из уравнения (18) равна:

$$q = c_p\left(T_2 - T_1\right) = h_2 - h_1, \tag{22}$$

т.е. подведённая теплота в изобарном процессе равна изменению энтальпии газа.

На $p - v$ диаграмме изобарный процесс изображается прямой линией параллельной оси абсцисс. Если газ в процессе испытывает расширение, то его работа положительна, если в сторону сжатия, то отрицательна.



Изотермический процесс.

$$pv^1 = pv = RT = \text{const} \tag{23}$$

Политропный процесс с показателем $n = 1$ протекает при постоянной температуре; этот процесс называется изотермическим. Следовательно, меняются в процессе только давление газа и его объем:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{24}$$

В этом процессе объемы газа меняются обратно пропорционально давлениям (закон Бойля—Мариотта)

Работа газа в изотермическом процессе определяется как:

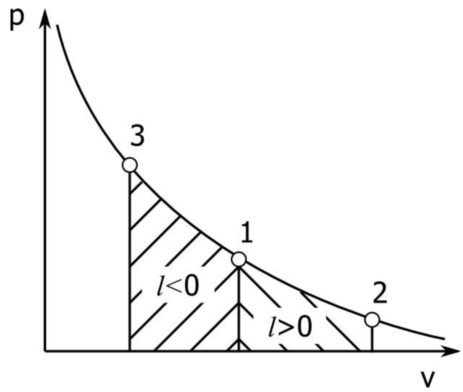
$$l = \int_1^2 \frac{RT}{v} dv = RT \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = RT \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \tag{25}$$

Исходя из теплоёмкости политропного процесса, в изотермическом процессе теплоёмкость равна:

$$c_\varphi = c_v \frac{n-k}{n-1} = c_v \frac{1-k}{1-1} = \pm\infty, \tag{26}$$

т.е. ни при каких конечных значениях теплоёмкости температура газа не может быть изменена, т.к. вся подводимая теплота расходуется на совершение работы.

На $p-v$ диаграмме кривая процесса представляется уравнением $pv = \text{const}$, т.е. гиперболой, для которой оси координат являются асимптотами. Так как произведение pv увеличивается при увеличении температуры, то изотерма тем дальше отстоит от начала координат, чем более высокую температуру она представляет.



Так как температура в процессе не меняется, то внутренняя энергия газа также остается постоянной и $du = 0$. Следовательно, уравнение первого закона термодинамики для этого процесса имеет вид:

$$dq = dl, \tag{27}$$

или вся подведенная теплота превращается в работу расширения газа и обратно, вся работа, затраченная на сжатие газа, должна быть отведена в окружающую среду в форме теплоты.

Адиабатный процесс.

Если показатель политропы $n = c_p / c_v = k$, то из выражения (18) находим, что теплота, подводимая в процессе, равна нулю.

$$q = c_v \frac{n-k}{n-1}(T_2 - T_1) = c_v \frac{k-k}{k-1}(T_2 - T_1) = 0 \tag{28}$$

Следовательно, этот политропный процесс происходит без обмена теплотой с окружающим пространством. Такой процесс называется адиабатным. Из уравнения первого закона термодинамики находим при $dq = 0$:

$$\begin{gathered} du = -dl \\ \text{или} \\ l = c_v (T_1 - T_2), \quad T_1 > T_2 \end{gathered} \tag{29}$$

В этом процессе **вся совершаемая газом работа получается за счет уменьшения его внутренней энергии** и, наоборот, вся работа, затраченная на сжатие газа, идет на увеличение внутренней энергии.

Формулы связи между параметрами газа в адиабатном процессе и формулы работы получаются из общих формул политропного процесса при условии замены в них n на k.

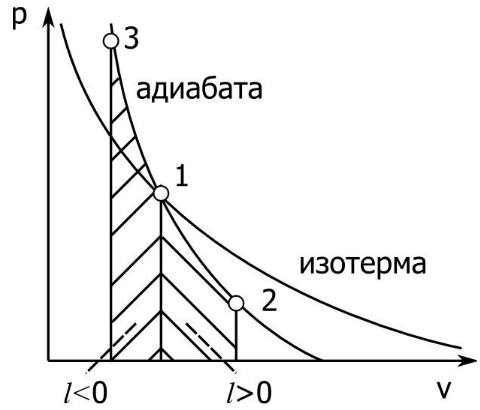
$$pv^k = const \tag{30}$$

$$l = \frac{R(T_1 - T_2)}{k-1}$$

или (31)

$$l = \frac{p_1 v_1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

Адиабата, представляя собой гиперболу высшего порядка (так как $k > 1$), на $p - v$ диаграмме изображается более крутой кривой, чем изотерма.



Изохорный процесс.

Если показатель политропы $n = \pm\infty$, то общую зависимость между давлениями и объемами в политропном процессе можно представить в виде:

$$\begin{gathered}\left(pv^n\right)^{1/n} = \left(const\right)^{1/n} \\ p^{1/n}v = p^0 v = v = const\end{gathered}. \tag{32}$$

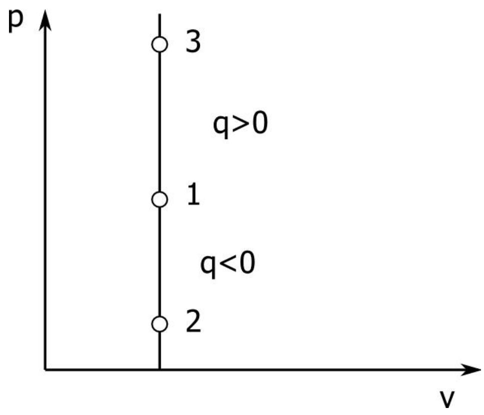
Таким образом, при показателе политропы $n = \pm\infty$ политропный процесс происходит при постоянном объёме. Такой процесс называется изохорным. Из уравнения состояния для изохорного процесса находим:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \tag{33}$$

Так как $dv = 0$, то газ в этом процессе работы не производит и уравнение первого закона термодинамики приводится к виду:

$$\begin{gathered}dq = du \\ q = c_v\left(T_2 - T_1\right)\end{gathered} \tag{34}$$

На $p - v$ диаграмме изохора представляется прямой, параллельной оси давлений. Направление процесса из начальной точки характеризует увеличение внутренней энергии и нагрев газа, а вниз - охлаждение путем отвода теплоты в окружающую среду.



4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ПОЛИТРОПЫ

На практике иногда приходится определять значение показателя политропы для заданной кривой, представленной на $p-v$ диаграмме. На диаграмме может быть представлена кривая с разными показателями политропы на разных участках, но тем не менее можно определить среднее значение показателя политропы для всей кривой в целом. Для этого используем уравнение:

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n \tag{35}$$

Отсюда:

$$n = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{\ln \frac{v_1}{v_2}} \tag{36}$$