

Функция распределения

Общим законом распределения для всех случайных величин является функция распределения.

Определение. Функция $F(x)$ действительной переменной x , $-\infty < x < +\infty$, определяемая формулой $F(x) = P(X < x)$ называется функцией распределения случайной величины X .

Таким образом $F(x)$ сл.в. X это вероятность того, что случайная величина принимает значения, меньшие x .

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, $-\infty < x < +\infty$;

Все значения функции $F(x)$ заключены между 0 и 1. Это следует из определения функции как вероятности.

Значит график этой функции $y = F(x)$ лежит между прямыми $y = 0$ и $y = 1$.

2. $F(x)$ - неубывающая функция на всей оси, т.е. для любых x_1 и x_2 , таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $F(x_1) \leq F(x_2)$;

3. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;

4. $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$;

5. Вероятность попадания случайной величины X на произвольный полуинтервал действительной оси $[a, b)$ определяется формулой $P(a \leq x < b) = F(b) - F(a)$.

6. Для любого числа a вероятность того, что сл.в. X принимает значение a , равна величине скачка функции распределения в точке a . $P(X=a) = F(a+0) - F(a)$

Плотность распределения вероятностей

Определение. Плотностью распределения вероятностей случайной величины X называется производная от функции распределения $f(x) = F'(x)$.

Если X - непрерывная случайная величина, то ее функция распределения непрерывна и производная берется в классическом смысле. Итак, если X - непрерывная случайная величина, то $f(x) = F'_{кл}(x)$.

Если X - дискретная случайная величина, то ее функция распределения имеет разрывы типа «скачок» в возможных значениях x_i случайной величины. В этом случае говорят об обобщенной плотности распределения, которая равна обобщенной производной функции распределения, где $\delta(x)$ - δ -функция Дирака.

Вероятностный смысл плотности распределения: используя определение производной и свойство 5 функции распределения, получаем

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Итак, плотность распределения вероятностей есть предел отношения вероятности попадания в элементарный полуинтервал $[x, x + \Delta x)$ к длине этого интервала при условии, что интервал стягивается к точке x . Этим фактом и определяется термин «плотность распределения вероятностей».

Непрерывные случайные величины

а) Функция распределения вероятностей

Особые свойства функции распределения непрерывной случайной величины

- Для непрерывной случайной величины вероятность того, что она принимает конкретное значение, равна нулю
 $P(X = x_0) = 0$.
- Из пункта первого следует: $P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Замечание. Для непрерывной случайной величины имеет смысл рассматривать вероятность попадания случайной величины на некоторый интервал, а вероятность того, что непрерывная случайная величина принимает конкретное значение, равна нулю.

Пример 3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 0,5x - 1, & 2 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Найдем вероятность следующих событий

$$P(X < 1) = F(1) = 0, \quad P(X < 2,4) = F(2,4) = 0,5 \cdot 2,4 - 1 = 0,2,$$

$$P(X \geq 2,4) = 1 - P(X < 2,4) = 0,8, \quad P(3 \leq X < 5) = F(5) - F(3) = 1 - (0,5 \cdot 3 - 1) = 0,5.$$

Какие значения может принимать данная случайная величина X ? $F(2) = 0$, т.к. $P(X < 2) = 0$, следовательно, значения меньше 2 не наблюдаются. $F(4) = 1$, т.е. $F(X < 4) = 1$. Следовательно, все, что может наблюдаться меньше 4. Таким образом, возможные значения случайной величины X - это интервал $(2,4)$.

b) Плотность распределения вероятностей

Определение. Плотностью распределения вероятностей случайной величины X называют функцию $f(x)$, равную производной от функции распределения

$$f(x) = F'(x)$$

Свойства плотности распределения вероятностей:

1. $f(x) \geq 0$, так как плотность распределения это производная от неубывающей функции.

2.
$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$$
.

3.
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

4.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$
.

Из свойства 4 плотности распределения следует, что
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$
.

с) Числовые характеристики непрерывной случайной величины

1. **Математическое ожидание** (среднее ожидаемое значение случайной величины)

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

2. **Дисперсия** (рассеяние, разброс случайной величины)

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx$$

или

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

где

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

3. **Среднее квадратическое отклонение** $\sigma(X)$ – это корень квадратный из дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Замечание. В обоих определениях предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно.

Если плотность распределения $f(x)$ задана на конечном интервале (вне его равна нулю), то интегрирование будет вестись по этому интервалу. В механической интерпретации математическое ожидание непрерывной случайной величины сохраняет тот же смысл что и для дискретной случайной величины: это абсцисса центра тяжести в случае, когда масса распределена по оси OX непрерывно, с плотностью $f(x)$.

Пример.

Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ (x^2 + x)/2, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Найти: 1. Плотность распределения вероятностей $f(x)$.

2. Числовые характеристики распределения – математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение – $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

3. Построить графики функции распределения и плотности распределения $y = F(x)$, $y = f(x)$.

Решение. 1. По определению, плотность распределения вероятностей равна производной от функции распределения, т.е.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ x + 1/2, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

2. Теперь найдем числовые характеристики. Так как плотность распределения $f(x)$ не равна нулю только на промежутке от нуля до единицы, то везде интегрирование будет вестись по этому промежутку. Находим:

a) **Математическое ожидание:**

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2}x \right) dx = \\ = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 0,583.$$

b) **Дисперсия:** $D(X) = M(X^2) - M^2(X).$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \\ = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} = 0,417.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12} \right)^2 = \frac{60 - 49}{144} = \frac{11}{144} = 0,076.$$

c) **Среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{11}{144}} = \frac{\sqrt{11}}{12} = 0,276.$$

3. Строим график функции $y = F(x)$ – функции распределения вероятностей и график функции $y = f(x)$ – плотности распределения вероятностей.

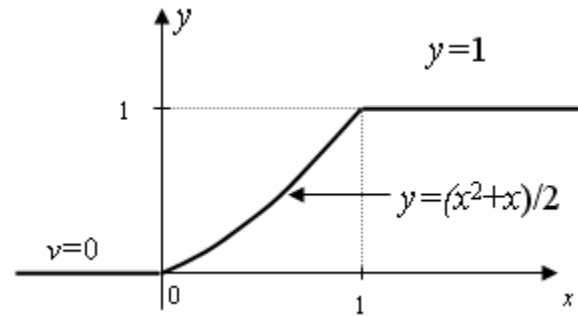


График функции $y = F(x)$

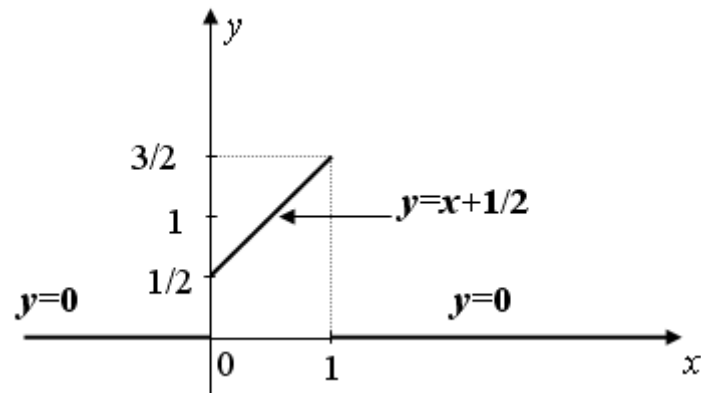


График функции $y = f(x)$

Свойства математического ожидания и дисперсии

Свойства математического ожидания:

Далее X , Y - случайные величины, C - постоянная.

1. $M(C) = C$;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$;
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
4. Если случайные величины X и Y независимы, то $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Свойства дисперсии

Механическим аналогом дисперсии является момент инерции заданного распределения масс относительно центра тяжести. Пусть, как и ранее, X , Y - случайные величины, C - постоянная.

1. $D(C) = 0$.
2. $D(X) \geq 0$.
3. $D(X + C) = D(X)$.
4. $D(CX) = C^2 D(X)$.
5. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.
6. $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$ для независимых случайных величин.