Лекция 05. Кинематика вращательного движения. Векторы угловой скорости и ускорения. Момент сил. Динамика вращательного движения. Момент импульса системы частиц и твердого тела. Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера. Уравнение динамики вращательного движения

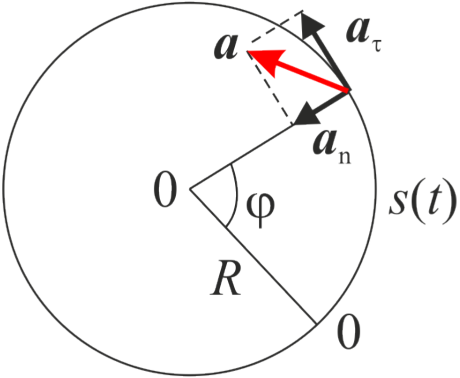
Штыгашев А.А.

Новосибирск, НГТУ

План

- Кинематика движения частицы по окружности в плоскости
- Кинематика движения частицы по окружности в пространстве
- Момент импульса материальной точки относительно полюса
- Момент силы относительно полюса
- Закон изменения момента импульса материальной точки
- Момент импульса системы материальных точек или твердого тела относительно полюса
- Закон сохранения момента импульса относительно полюса
- Момент импульса материальной точки в поле центральной силы
- Работа и мощность внешних сил при вращательном движении относительно неподвижной оси
- Закон сохранения момента импульса относительно оси вращения

Кинематика движения частицы по окружности в плоскости



$$R = const$$

$$s = s(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

$$s = R\varphi$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}$$

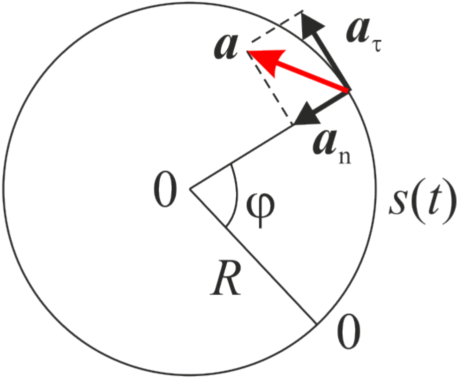
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \equiv \ddot{\varphi}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{n}_\tau \equiv \frac{ds}{dt}\boldsymbol{n}_\tau = v\boldsymbol{n}_\tau$$

$$v = \dot{s} \equiv \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = R\dot{\omega} = R\varepsilon$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$



$$\boldsymbol{a}_\tau = a_\tau \boldsymbol{n}_\tau$$

$$\boldsymbol{a}_n = a_n \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n$$

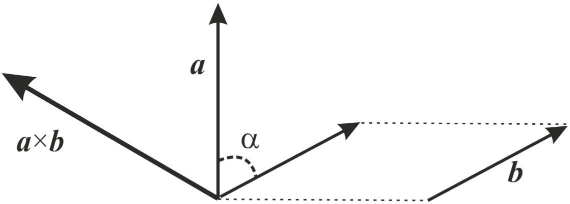
Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, равный

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

или

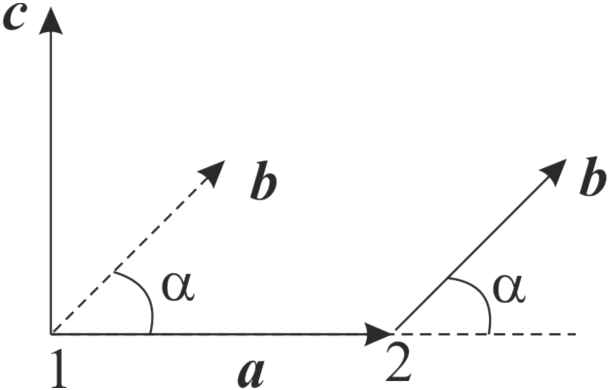
$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k} \qquad (1)$$



Длина вектора $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ равна

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab\sin\alpha \qquad (2)$$

где угол α между векторами, сам модуль векторного произведение есть площадь параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.


c
b
b
α
α
1
a
2

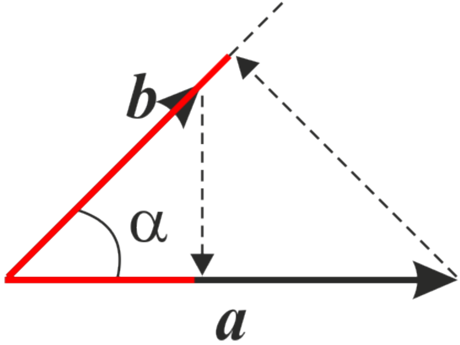
Скалярное произведение векторов

$$\boldsymbol{ab} = ab\cos\alpha$$

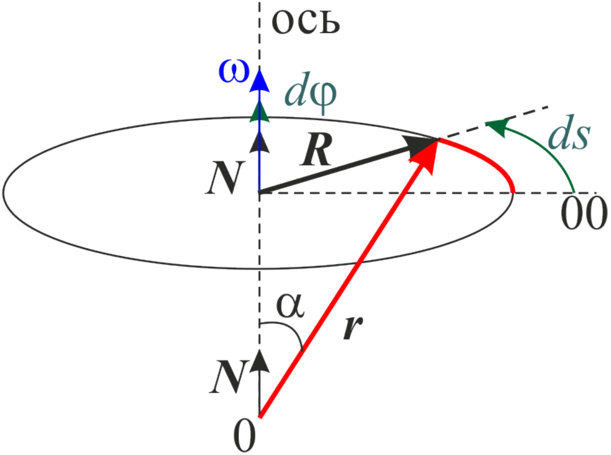
$$\boldsymbol{ab} = ab_a = a_b b$$

$$\boldsymbol{ab} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\boldsymbol{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$



Кинематика движения частицы по окружности в пространстве



$$d\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{N} d\varphi$$

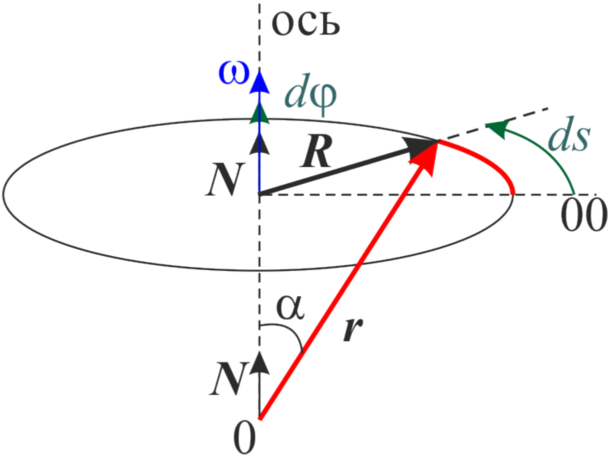
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{N}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{N}\omega$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

$$v = \omega R$$

$$v = \omega r \sin\alpha$$



$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

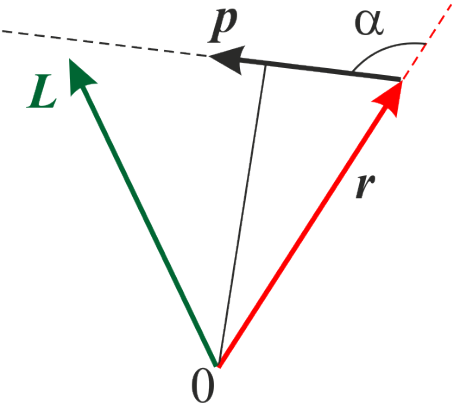
Момент импульса материальной точки относительно полюса и относительно оси

Следует различать моменты вектора относительно точки (полюса) и относительно оси:

- Момент вектора относительно полюса сам есть вектор.
- Момент того же вектора относительно оси есть проекция вектора (скаляр) на эту ось относительно точки, лежащей на оси.

Момент импульса $\boldsymbol{L}$ материальной точки относительно полюса

Материальная точка массы m движется со скоростью v относительно системы отсчета 0.



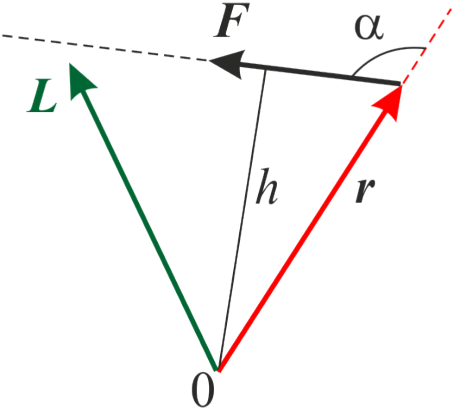
Моментом импульса $\boldsymbol{L}$ относительно полюса О называется векторное произведение радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ на импульс $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{L} \perp \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{L} \perp \boldsymbol{p}, \quad L = rp \sin\alpha = pr_{\perp}$$

Момент силы $\boldsymbol{M}$, действующей на материальную точку, относительно полюса

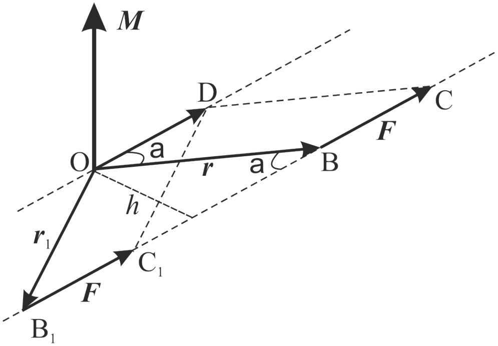
Пусть к материальной точке, находящейся в точке $\boldsymbol{r}$ приложена сила $\boldsymbol{F}$, относительно системы отсчета 0.



Моментом силы $\boldsymbol{M}$ относительно полюса О называется векторное произведение радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ на силу $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{r}, \ \boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{F}, \ M = rF \sin\alpha = Fh$$



1. Момент силы $\boldsymbol{M}$ не изменится, если точку приложения силы B перенести в любую другую точку B_1 на линии действия силы (модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах). $S_{OBCD} = S_{OB_1C_1D}$ (общее основание OD и равная высота (плечо действия силы) h:

$$M = Fh = Fr\sin\alpha \qquad (5)$$

2. Если $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$, то

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2 \tag{6}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2, \tag{7}$$

Момент равнодействующей двух и более сил относительно некоторого полюса равен векторной сумме моментов составляющих сил относительно этого же полюса.

Дифференцируем по времени $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, тогда

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}. \tag{8}$$

Так как скорость параллельна импульсу, то первое слагаемое правой части выражения равна нулю, а производную импульса, согласно второму закону Ньютона, заменяем на силу:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}. \tag{9}$$

Закон изменения момента импульса материальной точки

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}. \tag{10}$$

Скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту действующей на точку силы.

Этот закон также называют уравнением моментов.

Закон сохранения момента импульса материальной точки

Если момент силы, действующей на материальную точку равен нулю:

- $F = 0$,
- $\boldsymbol{F} \| \boldsymbol{r}$,

то момент импульса материальной точки не изменяется

$$\boldsymbol{L} = \mathrm{const}$$

Движение тел в поле центральной силы

Иоганн Кеплер вывел три закона движения планет

- 1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
- 2. Радиус-вектор планеты, проведенный из фокуса, в котором находится Солнце, описывает в равные промежутки времени равные площади.
- 3. Квадраты периодов обращения планет по эллипсам относятся как кубы больших полуосей.

В поле центральной силы

$$\boldsymbol{F} = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

момент силы равен нулю

$$\boldsymbol{F} \| \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$$

следовательно, полный момент импульса не изменяется со временем

$$\boldsymbol{L} = \mathrm{const}$$

Так как

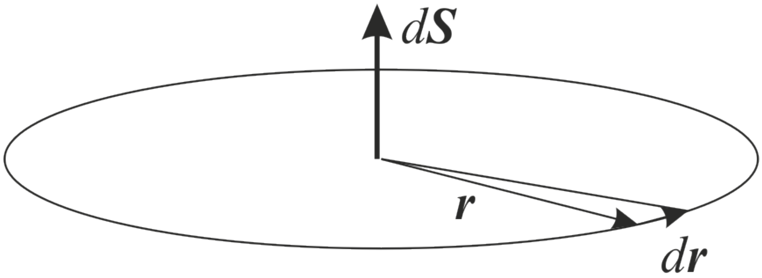
$$\boldsymbol{L} \perp \boldsymbol{r} \ \text{ и } \ \boldsymbol{L} \perp \boldsymbol{p}$$

то вектора $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$ лежат в одной плоскости.

Момент импульса перпендикулярен плоскости которой лежат радиус-вектор, вектор импульса и центр силы, следовательно, и траектория (орбита) тела лежит в этой плоскости, тем самым исключаются из рассмотрения пространственные траектории типа винтовой линии или иной траектории.

Момент импульса материальной точки в поле центральной силы

Если система состоит из одной материальной точки, то момент импульса имеет простой геометрический смысл.
Пусть в момент времени t положение материальной точки определяется радиус-вектором $\boldsymbol{r}(t)$ и за время dt радиус-вектор получил приращение $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$,



Согласно свойству векторного произведения векторов $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{v}(t)dt$ площадь треугольника, построенного на этих векторах можно характеризовать вектором

$$d\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}dt, \tag{11}$$

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}, \tag{12}$$

где $\dot{\boldsymbol{S}}$ - секториальная скорость.
Сравнивая секториальную скорость и момент импульса, запишем $\boldsymbol{L} = 2m\dot{\boldsymbol{S}}$.

Если сила, действующая на тело, является центральной и её направление проходит через полюс, то вектор силы $\boldsymbol{F}$ параллелен радиус-вектору $\boldsymbol{r}$ и момент силы $\boldsymbol{M}$ равен нулю, следовательно, момент импульса не изменяется со временем,

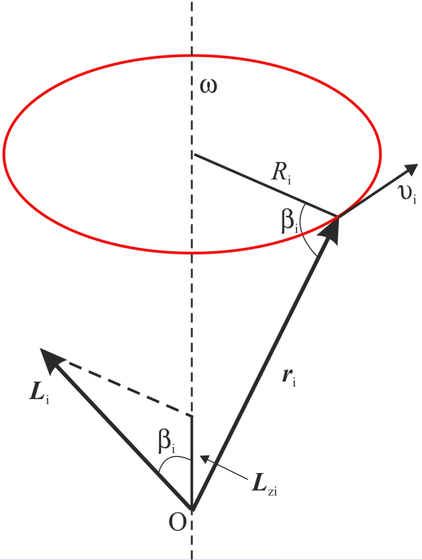
$$\boldsymbol{L} = \text{const} \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{S}} = \text{const} \tag{13}$$

Секториальная скорость в поле центральной силы постоянная.

Следствие: радиус-вектор $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{p}(t)$ импульс лежат в одной плоскости и за равные промежутки времени радиус-вектор материальной точки описывает одинаковые по величине площади (второй эмпирический закон Кеплера).

Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает собой равные площади.

Динамика вращательного движения тела относительно неподвижной оси вращения



Важной задачей в механике твердого тела является задача описания вращения тела вокруг неподвижной оси. Выберем ось вращения и выберем оси координат так, чтобы ось z направлена по оси вращения, тогда проекция момента импульса относительно выбранной оси вращения имеет вид

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{zi} = \sum_{i=1}^{N} L_i \cos\beta_i \tag{14}$$

Модуль момента импульса для i-й элементарной массы m_i тела

$$L_i = m_i r_i v_i \sin \pi/2 = m_i r_i v_i \tag{15}$$

запишем выражение для проекции момента импульса на ось вращения

$$L_{zi} = m_i r_i v_i \cos \beta_i = m_i v_i R_i \tag{16}$$

где R_i - расстояние i-й материальной точки тела до оси вращения.

Учитывая связь между v_i линейной и угловой ω скоростями

$$v_i = \omega R_i \tag{17}$$

запишем для L_{zi}

$$L_{zi} = m_i R_i^2 \omega \tag{18}$$

Для тела проекция момента импульса на ось вращения имеет вид

$$L_z = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \right) \omega \tag{19}$$

$$I_z \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \right) \tag{20}$$

$$L_z = I_z \omega \tag{21}$$

Уравнение вращательного движения тела (уравнение проекции моментов) вокруг неподвижной оси имеет вид

$$\frac{d}{dt} L_z = M_z \tag{22}$$

Здесь проекция момента силы относительно оси вращения характеризует способность силы вращать тело вокруг этой оси.
Уравнение проекции моментов (индекс z здесь и далее явно не выписываем) принимает вид

$$I\frac{d}{dt}\omega = M \tag{23}$$

которое называется основным уравнением вращательного движения тела относительно неподвижной оси.

Момент инерции относительно неподвижной оси может быть записан так

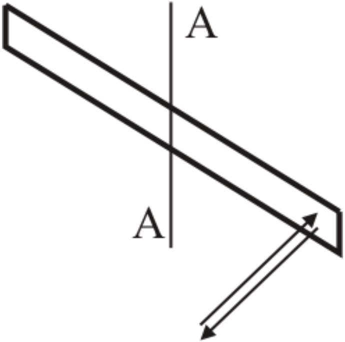
$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2,$$

$$I = \int_{(m)} R^2 dm$$

$$I = \int_{(V)} R^2 \rho dV. \tag{24}$$

Пример 6.1.

Найти момент инерции тонкого стержня относительно оси проходящей через центр массы стержня перпендикулярной стержню



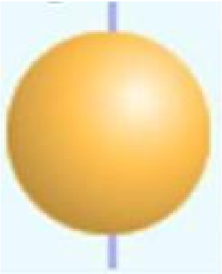
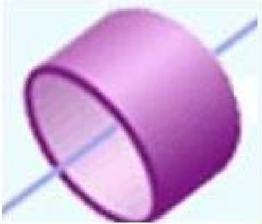
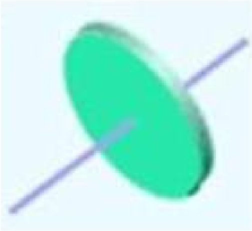
$$I_C = \int_{(l)} R^2 \rho S dR = \int_{-l/2}^{l/2} R^2 \rho S dR.$$

$$I_C = \rho S \frac{R^3}{3}\Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12}(\rho S l) l^2$$

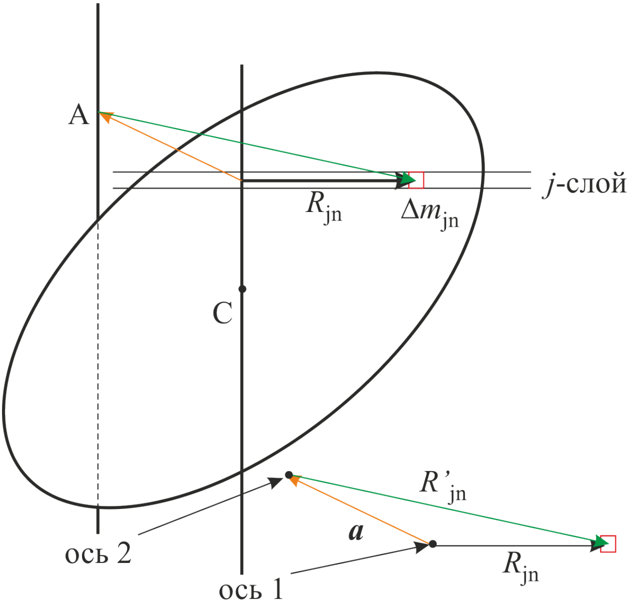
$$I_C = \frac{1}{12} m l^2 \qquad (25)$$

Моменты инерции симметричных тел относительно осей проходящих через центр масс и сохраняющих симметрию вращения (без вывода)

- Шар $I_C = \frac{2}{5} m R^2;$
- Сфера $I_C = \frac{2}{3} m R^2;$
- Кольцо, тонкостенный цилиндр $I_C = m R^2;$
- Диск $I_C = \frac{1}{2} m R^2;$

Теорема Гюйгенса-Штейнера



$$\boldsymbol{R}'_{jn} = \boldsymbol{R}_{jn} - \boldsymbol{a}$$

$$R'^2_{jn} = (\boldsymbol{R}_{jn} - \boldsymbol{a})^2.$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера

$$R'^2_{jn} = \boldsymbol{R}^2_{jn} - 2\boldsymbol{R}_{jn}\boldsymbol{a} + a^2.$$

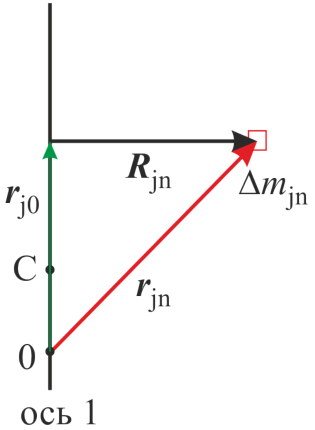
Суммируем по n внутри слоя и затем суммируем по j-слоям:

$$\sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn} R'^2_{jn} = \sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn} R^2_{jn} - 2\left(\sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn} \boldsymbol{R}_{jn}\right)\boldsymbol{a} + ma^2. \quad (26)$$

где

$$m = \sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn}, \quad I'_A = \sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn} R'^2_{jn}, \quad I_C = \sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn} R^2_{jn}. \quad (27)$$

$$I'_A = I_C - 2\left(\sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn} \boldsymbol{R}_{jn}\right)\boldsymbol{a} + ma^2. \quad (28)$$



Покажем, что выражение в круглых скобках есть $m\boldsymbol{r}_C$:

$$m\boldsymbol{r}_C = \sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn}\boldsymbol{r}_{jn} \tag{29}$$

Пусть полюс находится на оси 1

$$\boldsymbol{R}_{jn} = \boldsymbol{r}_{jn} - \boldsymbol{r}_{j0} \tag{30}$$

$$\sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn}\boldsymbol{R}_{jn} = \sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn}\boldsymbol{r}_{jn} - \left(\sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn}\right)\boldsymbol{r}_{j0}$$

$$\left(\sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn} \boldsymbol{R}_{jn}\right) \boldsymbol{a} = \left(\sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn} \boldsymbol{r}_{jn}\right) \boldsymbol{a} - \left(\sum_{jn=1}^{N} \Delta m_{jn}\right) \boldsymbol{r}_{j0} \boldsymbol{a}$$

Скалярное произведение в последнем слагаемом тождественно равно нулю, а первое слагаемое равно $m\boldsymbol{r}_C\boldsymbol{a}$.
Итак, момент инерции тела относительно оси 2 равен

$$I'_A = I_C - 2m\boldsymbol{r}_C\boldsymbol{a} + ma^2. \tag{31}$$

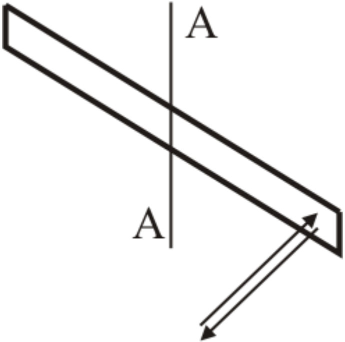
Ось вращения проходит через центр масс тела $\boldsymbol{r}_C\boldsymbol{a} = r_C a \cos\pi/2 = 0$, тогда

$$I'_A = I_C + ma^2. \tag{32}$$

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции тела относительно параллельной оси , проходящей через центр масс тела сложенном у с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Пример 6.2.

Найти момент инерции тонкого стержня относительно оси проходящей конец стержня, перпендикулярной стержню.



$$I'_C = \int_{(l)} R^2 \rho S dR = \int_0^l R^2 \rho S dR.$$

$$I'_C = \rho S \frac{R^3}{3}\Big|_0^l = \frac{1}{3}(\rho S l) l^2$$

$$I'_C = \frac{1}{3} m l^2 \tag{33}$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера

$$I'_C = I_C + m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{12} m l^2 + m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2 \tag{34}$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

Вращение тела относительно неподвижной оси.

Рассмотрим кинетическую энергию i-й материальной точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \;\to\; E_{ki} = \frac{1}{2} m_i (\omega R_i)^2 \;\to\; E_{ki} = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 \tag{35}$$

Кинетическая энергия тела в этом случае равна

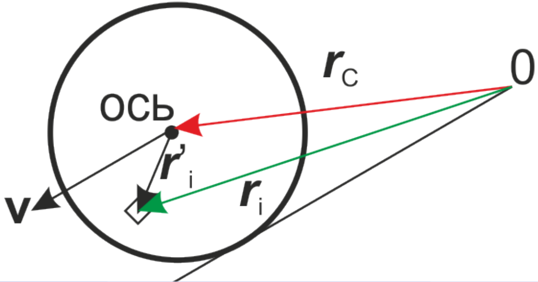
$$E_k = \sum_{i=1}^{N} E_{ki} \;\to\; E_k = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{36}$$

Кинетическая энергия тела при плоском движении

Плоское движение представляется как поступательное движения центра масс C и вращательное движение относительно центра масс т.е. для i-й элементарной массы тела запишем

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}'_i \tag{37}$$

где $\boldsymbol{r}_i$ - радиус вектор i-й элементарной массы тела относительно начала системы отсчета, $\boldsymbol{r}_C$ - радиус-вектор центра масс тела, $\boldsymbol{r}'_i$ - радиус-вектор i-й элементарной массы тела относительно центра масс тела.



Скорость i-й элементарной массы тела

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i \tag{38}$$

Кинетическая энергия i-й элементарной массы тела есть

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i)^2$$

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i (v_C^2 + 2\boldsymbol{v}_C \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i)^2) \tag{39}$$

Здесь

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i')^2 = (\omega r_i' \sin\alpha_i)^2 = (\omega R_i)^2, \tag{40}$$

где R_i - расстояние i-й элементарной массы до оси вращения, проходящей через центр масс тела, тогда кинетическая энергия тела при плоском движении есть

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \boldsymbol{v}_C \boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i' + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \tag{41}$$

или

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + m \boldsymbol{v}_C \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_C + \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{42}$$

где $I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$ - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Если выбрать начало отсчета в центре масс тела, то выражение для кинетической энергии при плоском движении упростится

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{43}$$

Закон сохранения момента импульса относительно полюса

Для системы из N взаимодействующих частиц можем записать систему уравнений движения и рассмотреть изменения моментов импульса для каждой частицы системы относительно полюса O, для этого надо векторно умножить каждое I-е слагаемое системы на радиус-вектор $\boldsymbol{r}_i$, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{13} + ... + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{1N} + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{\Phi}_1, \\ \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{23} + ... + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{2N} + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{\Phi}_2, \\ ... \\ \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{p}_N = \boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{F}_{N1} + \boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{F}_{N2} + ... + \boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{F}_{N,N-1} + \boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{\Phi}_N. \end{cases} \tag{44}$$

При выводе левой части использовалось

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} - \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}\right) \times \boldsymbol{p} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{45}$$

Моменты внутренних сил попарно сокращаются, покажем это

$$\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{F}_{nm} + \boldsymbol{r}_m \times \boldsymbol{F}_{mn} = (\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_m) \times \boldsymbol{F}_{mn} = 0 \tag{46}$$

так как внутренние силы параллельны $(\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_m)$.
Суммируем систему, получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{p}_n = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{\Phi}_n \tag{47}$$

Уравнение моментов для системы взаимодействующих частиц имеет точно такой же вид, что и для одной частицы, если ввести обозначения для полного момента импульса системы

$$\boldsymbol{L} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{p}_n \tag{48}$$

и полного момента внешних сил

$$\boldsymbol{M} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{\Phi}_n \tag{49}$$

и

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M} \tag{50}$$

Изменение полного момента импульса системы частиц относительно некоторого полюса равно полному моменту внешних сил относительно этого же полюса, действующих на систему. Если система изолирована или суммарный момент всех внешних сил равен нулю

$$\boldsymbol{M} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{\Phi}_n = 0 \tag{51}$$

то тогда производная полного импульса системы равна нулю

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = 0 \tag{52}$$

и полный импульс системы не изменяется со временем

$$L = \text{const} \tag{53}$$

Суммарный момент импульса замкнутой системы тел относительно некоторого полюса сохраняется неизменным, если суммарный момент всех внешних сил относительно этого полюса равен нулю.
(закон сохранения момента импульса для замкнутой системы).

Закон сохранения момента импульса относительно оси вращения

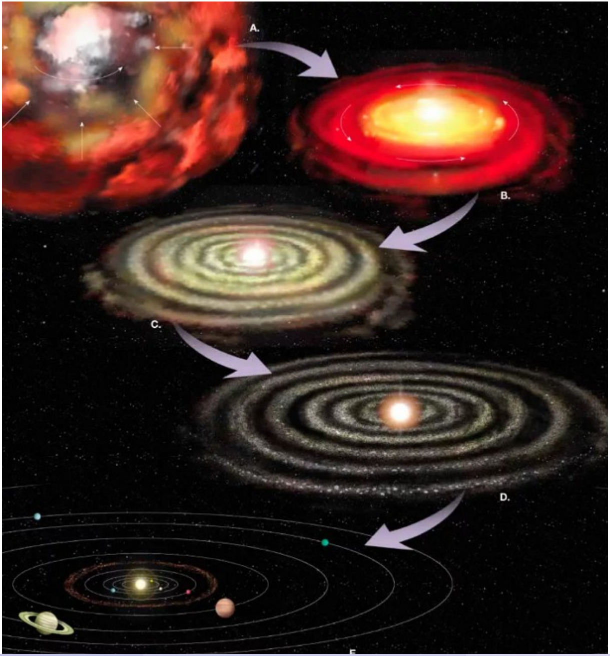
Найдем проекции моментов на некоторую выделенную ось и пусть эта ось буде осью z, тогда скалярно умножаем уравнение моментов на орт $\boldsymbol{k}$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{k} \tag{54}$$

$$\frac{d}{dt}L_z = M_z \tag{55}$$

где L_z - проекция момента импульса системы частиц (твердого тела) на ось z, M_z - проекция момента внешних сил, действующих на систему частиц (твердого тела), на ось z.

Закон сохранения момента импульса Солнечной системы имеет также большое значение, поскольку в наиболее распространенной модели формирования Солнечной системы, как кольцевое сбрасывание планетного материала из изначального суперобразования (прото-Солнце), возникает проблема сохранения момента импульса, так теперешний момент импульса Солнечной системы на многие порядки превосходит изначальный момент импульса.


A.
B.
C.
D.

Работа и мощность внешних сил при вращательном движении относительно неподвижной оси

Найдем работу моментов внешних сил, действубщих на тело

$$dA_i = \boldsymbol{\Phi}_i d\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{v}_i dt = \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)dt = (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\Phi}_i)\boldsymbol{\omega} dt \tag{56}$$

$$dA = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\Phi}_i)\boldsymbol{\omega} dt = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\omega} dt = \boldsymbol{M} d\boldsymbol{\varphi} \tag{57}$$

Мощность N_F

$$N_F = \frac{dA}{dt} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\omega} \tag{58}$$

ТЕСТ 6

Угол поворота вала изменяется по закону:

$$\varphi = 2t^2 + 5t + 8$$

Момент инерции вала равен $I = 10$ кг·м^2.
Найти вращающий момент M.