Лабораторная работа №3. Расчёт показателей эффективности одноканальной СМО с ограниченной очередью.

Цель.

- Научиться анализировать работу одноканальной СМО с ограниченной очередью на основе расчётов основных показателей эффективности.

- Определение основных характеристик работы одноканальной СМО с ограниченной очередью на основе компьютерного моделирования их работы.

Теоретические основы.

Одноканальная СМО с ограниченной очередью. Рассмотрим СМО, в которой имеется один канал обслуживания. Входной поток заявок и поток обслуживания заявок являются пуассоновскими потоками. При этом во входном потоке в единицу времени в среднем поступает λ заявок, и среднее время обслуживания каналом одной заявки равно $\frac{1}{\mu}$. В том случае, если канал занят, то заявка становится в очередь на обслуживание, в том случае, если в ней количество заявок в ожидании обслуживания не превосходит $m-1$. Если в очереди присутствуют m заявок, то вновь поступившая заявка получает отказ в обслуживании. Такая СМО имеет $m+1$ возможных состояний:

S_0 – состояние ожидания, канал свободен;
S_1 – канал занят обслуживанием заявки, в очереди нет заявок;
S_2 – канал занят, в очереди 1 заявка;
…
S_{m+1} – канал занят, в очереди m заявок.

Граф состояний такой СМО представлен на Рис.1.

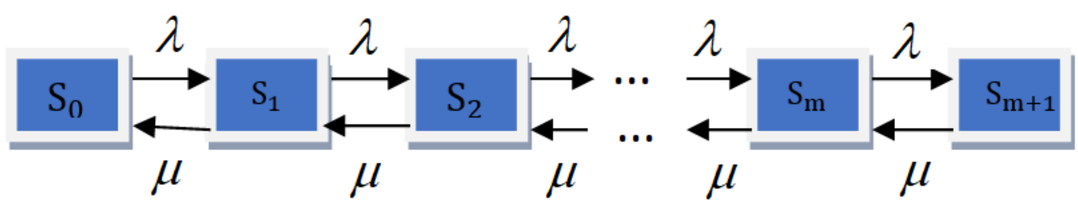

Рис.1. Граф состояний одноканальной СМО с очередью

Запишем уравнения Колмогорова, применяя правила их построения.

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dt} = \mu p_1 - \lambda p_0, \\ \frac{dp_1}{dt} = \lambda p_0 + \mu p_2 - (\lambda + \mu) p_1, \\ \quad \cdots\cdots \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1} - (\lambda + \mu) p_k, \\ \quad \cdots\cdots \\ \frac{dp_{m+1}}{dt} = \lambda p_m - \mu p_{m+1}. \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы найти решение уравнений (1), к ним следует добавить уравнение:

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_{m+1} = 1. \qquad (2)$$

В стационарном состоянии производные в левых частях уравнений (1) принимают нулевые значения. После несложных преобразований можно выразить стационарные решения уравнений (1), (2):

$$\begin{cases} p_1 = \rho\, p_0, \\ p_2 = \rho^2\, p_0, \\ \quad \ldots \\ p_k = \rho^k\, p_0, \\ \quad \ldots \\ p_{m+1} = \rho^{m+1}\, p_0, \\ p_0 = [1 + \rho + \rho^2 + \ldots \rho^{m+1}]^{-1}, \end{cases}$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Так как в формуле для p_0 содержится сумма геометрической прогрессии, то можно записать $p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$, если $\rho \neq 1$. Если $\rho = 1$, то в этом случае $p_k = \frac{1}{m+2}$ $(k = 0, \ldots, m+1)$.

Основные показатели эффективности работы одноканальной СМО с ограниченной очередью

Заявка получает отказ в обслуживании, если при её поступлении система находится в состоянии S_{m+1}, *вероятность отказа* равна

$$p_{\text{отк}} = p_{m+1} = \begin{cases} \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}, & \text{если } \rho \neq 1 \\ \frac{1}{m+2}, & \text{если } \rho = 1 \end{cases}.$$

Относительная пропускная способность

$$Q = 1 - p_{\text{отк}} = \begin{cases} \dfrac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho^{m+2}}, & \text{если } \rho \neq 1 \\ \dfrac{m+1}{m+2}, & \text{если } \rho = 1 \end{cases}.$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q = \begin{cases} \lambda \cdot \dfrac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho^{m+2}}, & \text{если } \rho \neq 1 \\ \lambda \cdot \dfrac{m+1}{m+2}, & \text{если } \rho = 1 \end{cases}.$$

Среднее число заявок в очереди $l_{\text{оч}}$ равно математическому ожиданию целочисленной случайной величины k, равной количеству заявок в очереди, ожидающих обслуживания. Значения, которые может принимать $l_{\text{оч}}$ и соответствующие им вероятности приведены в следующей таблице:

k	1	2	…	m
$p_{k+1}, \rho \neq 1$	$\rho^2 \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$	$\rho^3 \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$	…	$\rho^{m+1} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$
$p_{k+1}, \rho = 1$	$\dfrac{1}{m+2}$	$\dfrac{1}{m+2}$	…	$\dfrac{1}{m+2}$

Итак, *средняя длина очереди*:

$$l_{\text{оч}} = \sum_{k=1}^{m} k\, p_{k+1} = \begin{cases} \dfrac{\rho^2[1-(m+1)\rho^m + m\rho^{m+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, & \text{если } \rho \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \text{если } \rho = 1 \end{cases}.$$

Среднее время ожидания в очереди определяется по формуле Литтла:

$$t_{оч} = \frac{l_{\text{оч}}}{\lambda}.$$

Задание.

На автомойку в течение часа в среднем приезжает λ автомобилей. В среднем на мойку автомобиля уходит $t_{\text{средн}}$ минут, а место для мойки только одно. Если в очереди на мойку стоят два автомобиля, то третий автомобиль в очередь не становится и проезжает мимо. В предположении, что входной поток и поток обслуживания простейшие, определить показатели эффективности данной СМО. При условии, что средняя стоимость мойки автомобиля 600 рублей, оценить средние потери автомойки за 8 часов работы.

Содержание отчёта.

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Условия задания по вашему варианту.
4. Решение задания.
5. Полученные результаты.
6. Выводы по работе.

Варианты заданий. Во всех вариантах $t_{\text{средн}}$=20 минут; λ=5+(номер варианта−1)·0.1 клиентов/ч.

Пример определения требуемых в задании числовых показателей работы СМО.

Для расчётов возьмём вариант № 21. Мы имеем СМО с ограниченной очередью. Максимальное количество клиентов в очереди $m = 2$. Во время работы в любой момент времени система может находиться в одном из 4-х возможных состояний:

S_0 – состояние ожидания, канал свободен;
S_1 – канал занят обслуживанием заявки, в очереди нет заявок;
S_2 – канал занят, в очереди 1 заявка;
S_3 – канал занят, в очереди 2 заявки.

Граф состояний СМО представлен на рисунке 1.

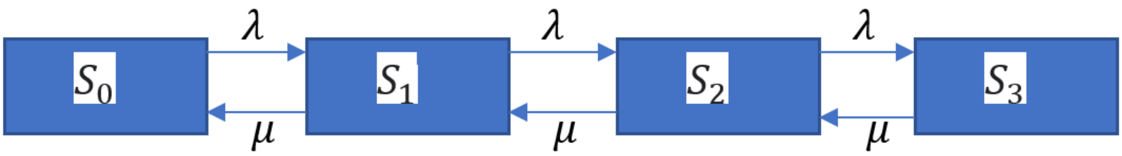

Рис.1. Граф состояний одноканальной СМО с очередью длиной 2.

Обозначим $p_i\ (i = 0, \ldots ,3)$ стационарные вероятности, соответствующие состояниям системы $S_i\ (i = 0, \ldots ,3)$.

Для данного варианта интенсивность входного потока равна λ=7 клиентов/час или 0.117 клиентов/мин, а интенсивность потока обслуживания клиентов равна $\mu = {}^{1}\!/_{20} = 0.05$ клиентов/мин.

Определим основные показатели эффективности работы СМО.

Интенсивность нагрузки канала определяем по формуле $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. В нашем случае $\rho = \frac{0.117}{0.05}$ =2.34 .

Вероятность состояния S_0 определяем по формуле: $p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^4} = \frac{1-2.34}{1-(2.34)^4} =$ 0.0462.

Вероятности состояний $p_i\ (i = 1, \ldots ,3)$ определяем по формуле: $p_i = \rho^i\, p_0$.

Вычисляем $p_1 = 2.34 \cdot 0.0462 = 0.1081$; $p_2 = (2.34)^2 \cdot 0.0462 = 0.2530$;
$p_3 = (2.34)^3 \cdot 0.0462 = 0.5920$.

Вычисления показали, что при интенсивности нагрузки канала 2.34 наиболее вероятным состоянием является S_3 с вероятностью p_3 =0.5920, когда канал обслуживания занят и в очереди находятся два клиента.

Для контроля проверяем равенство единице суммы найденных вероятностей: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0.0462 + 0.1081 + 0.2530 + 0.5920 = 0.993$. При данной точности вычислений отличается от единицы на $7 \cdot 10^{-3}$.

Найдём вероятность отказа в обслуживании, она равна вероятности состояния S_3, $p_{\text{отк}} = p_3 = 0.5920$.

Относительная пропускная способность: $Q = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - 0.5920 = 0.4080$.
Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda Q$ =7$\cdot$ $0.4080 = 2.856$ кл./час.
Средняя длина очереди:

$$l_{\text{оч}} = \sum_{i=1}^{2} i\, p_{i+1} = 0.2530 + 2 \cdot 0.5920 = 1.4370 \text{ кл.}$$

Среднее время ожидания в очереди определяется по формуле Литтла: $t_{оч} = \frac{l_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{1.437}{0.117}$ =12.2821 минут.

На мойку за 8 часов работы в среднем приезжает $7 \cdot 8 = 56$ автомобилей. Из них в среднем $56 \cdot 0.592 = 33$ клиента получают отказ, а 23 – обслуживаются. Таким образом, средний доход на 8 часов работы равен 600$\cdot$ 23 =13800 рублей, а упущенная выгода в среднем равна 600$\cdot$ 33 =19800 рублей.

Проведём статистическое моделирование работы СМО с целью получения оценок относительной пропускной способности и вероятности отказа в обслуживания в системе Matlab.

Запускаем модуль script2.m *в системе* Matlab:
```
>> script2
введите интенсивность входного потока (заявок/мин)
lambda=0.117
введите интенсивность работы канала обслуживания (заявок/мин)
mu=0.05
введите время работы СМО (часы)
T=8
Ввод вх. данных закончен. Нажмите Enter
```

В результате работы программы получили:
```
kz =

   60


kn =
```

35

Итак, по результатам моделирования за 8 часов работы автомойки из 60 автомобилей, приехавших на мойку 35 получили отказ. Вероятность отказа $p_{\text{отк}} \approx {}^{35}/_{60} = 0.5833$. Относительная пропускная способность $Q \approx 1 - 0.5833 = 0.4167$.

Приложение. Программа на языке Matlab для моделирования работы одноканальной СМО с ограниченной очередью

Исходные данные:

- lambda – интенсивность входного потока (заявок/мин);
- mu – интенсивность работы канала обслуживания (заявок/мин);
- m – максимальная длина очереди;
- T – время функционирования системы (часы).

Головной модуль script2.m *для ввода исходных данных и обращения к основному модулю моделирования* SMO2.m:

```
% моделирование одноканальной СМО с ограниченной очередью
disp('введите интенсивность входного потока (заявок/мин)')
lambda=input('lambda=');
disp('введите интенсивность работы канала обслуживания (заявок/мин)')
mu=input('mu=');
disp('введите максимальную длину очереди (заявок)')
m=input('m=');
disp('введите время работы СМО (часы)')
T=input('T=');
disp('Ввод вх. данных закончен. Нажмите Enter');
pause
[kz,kn] = SMO2(lambda,mu,m,T)
pause
```

Модуль SMO2.m:

```
function [kz,kn] = SMO2(lambda,mu,m,T)
% lambda -- интенсивность поступающих заявок/мин
% mu -- интенсивность обслуживания заявок/мин
% m -- максимальная длина очереди
% T -- время работы СМО (часы)
% kz -- количество поступивших заявок
% ko -- количество обслуженных заявок
```

```
% kn -- количество заявок, получивших отказ
% canal -- canal='true' - канал занят; canal='false' - канал свободен
canal=0;
h=0.00001; % шаг по времени (мин.)
lo=1/lambda;
mo=1/mu;
lq=0;  % длина очереди
kz=0;
ko=0;
kn=0;
t=0;
T1=T*60;
while t < T1
if canal == 0 & lq == 0 % если канал свободен и очередь пустая
t=t-lo*log(rand);   % время поступления очередной заявки в СМО
kz=kz+1;
canal=1;
t1=t-lo*log(rand);
kz=kz+1;
t2=t-mo*log(rand);
end  % if canal == 0
if canal == 0 & lq > 0 % если канал свободен и очередь не пустая
lq=lq-1;
canal=1;
t2=t-mo*log(rand);
end

if canal == 1 % если канал занят
if t < t2
t=t+h;
if t >= t2
canal=0;
ko=ko+1;
end
if t >= t1 & t < t2
if t1 < t2
if lq < m
lq=lq+1;
end
if lq == m
kn=kn+1;
end
t1=t1-lo*log(rand);
kz=kz+1;
end
```

```
end       % if t >= t1 & t < t2
end  % if t < t2
end  % if canal == 1
end  % while
```