Лекция 04. Импульс частицы. Импульс системы частиц. Закон изменения импульса. Закон сохранения импульса. Центр масс системы частиц. Закон движения центра масс. Абсолютно упругий и неупругий удар

Штыгашев А.А.

Новосибирск, НГТУ

Импульс силы

Согласно второму закону Ньютона, изменение импульса частицы можно представить так

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}dt \tag{1}$$

где правая часть $\boldsymbol{F}dt$ называется импульсом силы, измеряется в Н·с.

Импульс силы есть мера воздействия силы $\boldsymbol{F}$ на тело за данный промежуток времени dt.

Если процесс изменения импульса длиться конечное время t, то импульс силы есть

$$\boldsymbol{N}_{Ft} = \int_0^t \boldsymbol{F}(t')dt' \tag{2}$$

Теорема об изменении импульса

Изменение импульса (количества движения) есть

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \int_0^t \boldsymbol{F}(t')dt' \tag{3}$$

Это соотношение называется теоремой об изменении импульса и этой теоремой удобно пользоваться для решения обратной задачи – по изменению импульса за время t оценить среднюю силу $\langle \boldsymbol{F} \rangle$.

По определению средней величины

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

Тогда перепишем (3)

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \frac{1}{t}\left(\int_0^t \boldsymbol{F}(t')dt'\right)t \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = \langle \boldsymbol{F} \rangle t \tag{5}$$

Окончательно, получаем

$$\langle \boldsymbol{F} \rangle = \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0}{t} \tag{6}$$

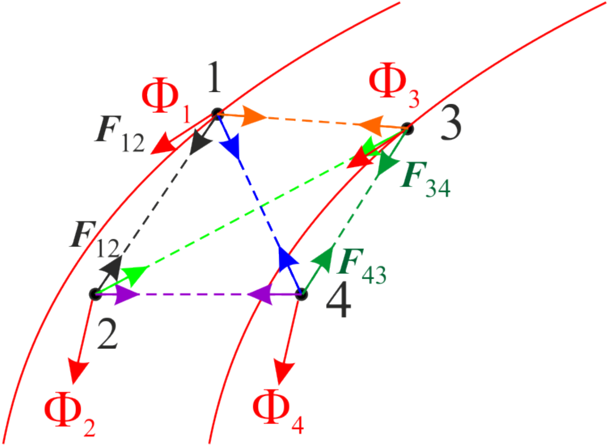
Импульсом системы частиц называют векторную сумму импульсов всех частиц системы

$$\boldsymbol{p} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{p}_n. \tag{7}$$

Закон сохранения импульса. Центр масс системы

Рассмотрим систему из N взаимодействующих частиц.
Отметим, что любое абсолютно твердое тело можно представить как систему N взаимодействующих математических точек.
Для этого весь объем абсолютно твердого тела можно представить как совокупность элементарных объемов, тогда элементарный объем определяет частицу, с массой равной массе тела, заключенной в данном элементарном объеме, причем абстрагируемся далее – будем считать, что масса сосредоточенна в центре этого элементарного объема.

Пусть на каждую i-ю материальную точку системы (или на элементарный объем тела) действуют силы взаимодействия $\boldsymbol{F}_{ij}$ со стороны j-х материальных точек системы (элементарных объемов тела), а также со стороны внешней среды действует внешняя сила $\boldsymbol{\Phi}_i$.



- $\boldsymbol{F}_{ij}$ - внутренние силы взаимодействия между i-м и j-м телами
- $\boldsymbol{\Phi}_i$- внешняя сила, действующая на i-е тело

Запишем закон движения для каждой частицы системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + ... + \boldsymbol{F}_{1N} + \boldsymbol{\Phi}_1, \\ \dfrac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} + ... + \boldsymbol{F}_{2N} + \boldsymbol{\Phi}_2, \\ ... \\ \dfrac{d\boldsymbol{p}_N}{dt} = \boldsymbol{F}_{N1} + \boldsymbol{F}_{N2} + ... + \boldsymbol{F}_{N,N-1} + \boldsymbol{\Phi}_N. \end{cases} \qquad (8)$$

После суммирования и попарной перекомпоновки внутренних сил, получаем

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{p}_n}{dt} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} (\boldsymbol{F}_{nm} + \boldsymbol{F}_{mn}) + \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\Phi}_n \qquad (9)$$

Согласно третьему закону Ньютона двойная сумма в правой части равна нулю.

Используя свойство линейности оператора производной, производную можно вынести за знак суммы

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) \tag{10}$$

Тогда получим закон изменения импульса для системы частиц

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{p}_n = \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\Phi}_n \tag{11}$$

Таким образом, закон изменения импульса для системы тел есть утверждение о том, что

производная по времени импульса всей системы равна сумме всех внешних сил действующих на систему.

Полный импульс ЗАМКНУТОЙ системы остается ПОСТОЯННЫМ.

Для замкнутой системы

$$\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\Phi}_n = 0$$

тогда

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{p}_n = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p} = \mathrm{const} \tag{12}$$

Суммарный импульс замкнутой системы остается постоянным во времени. Это утверждение есть закон сохранения импульса

Если система не замкнута, но можно выделить направление в пространстве, вдоль которого сумма проекций всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\Phi_x = \sum_{n=1}^{N} \Phi_{n,x} = 0 \tag{13}$$

Запишем закон изменения импульса для x-той компоненты

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N} p_{n,x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dp_x}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p}_x = \mathrm{const} \tag{14}$$

Последнее утверждение означает, что не изменяется со временем проекция импульса системы на то направление, вдоль которого сумма проекций всех внешних сил равна нулю.

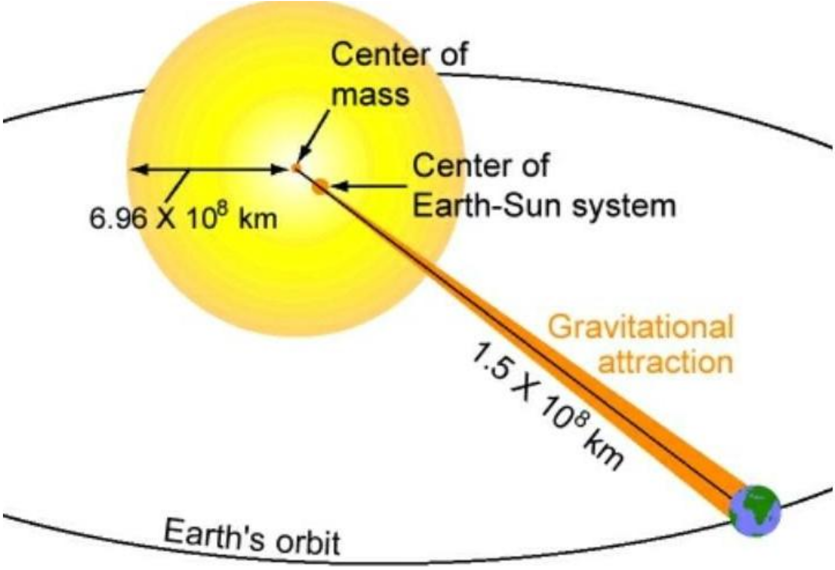
$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = 0 \quad \text{vs} \quad \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_{21} + \boldsymbol{p}_{22} + \boldsymbol{p}_{23} + \boldsymbol{p}'_3 = 0$

Центр масс (центр инерции) системы

В классической механике импульс системы может быть выражен через импульс центра масс системы.

Центром масс или центром инерции системы называется воображаемая точка, и характеризующая распределение массы в системе, радиус-вектор которой равен

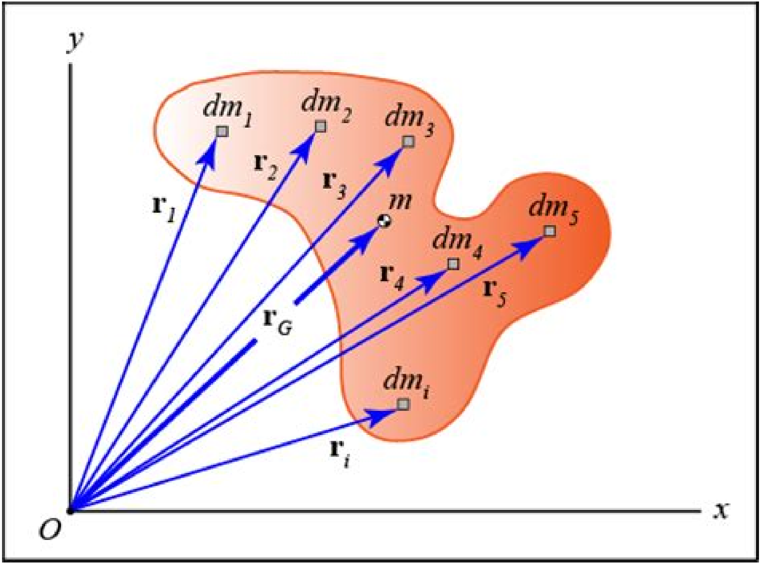
$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N} m_n \boldsymbol{r}_n, \quad m = \sum_{n=1}^{N} m_n. \tag{15}$$


Center of mass
Center of Earth-Sun system
6.96 X 10^8 km
Gravitational attraction
1.5 X 10^8 km
Earth's orbit

Для твердого тела с непрерывной распределенной массой удобно использовать следующее определение

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{1}{m}\int_m \boldsymbol{r} dm, \quad m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho dV \tag{16}$$

где ρ - плотность распределения массы тела.


y
dm 1
dm 2
dm 3
r 2
r 3
m
dm 5
r 1
dm 4
r 4
r 5
r G
dm i
r i
O
x

Преобразуем определение ЦМ так

$$m\boldsymbol{r}_c = \sum_{n=1}^{N} m_n \boldsymbol{r}_n,$$

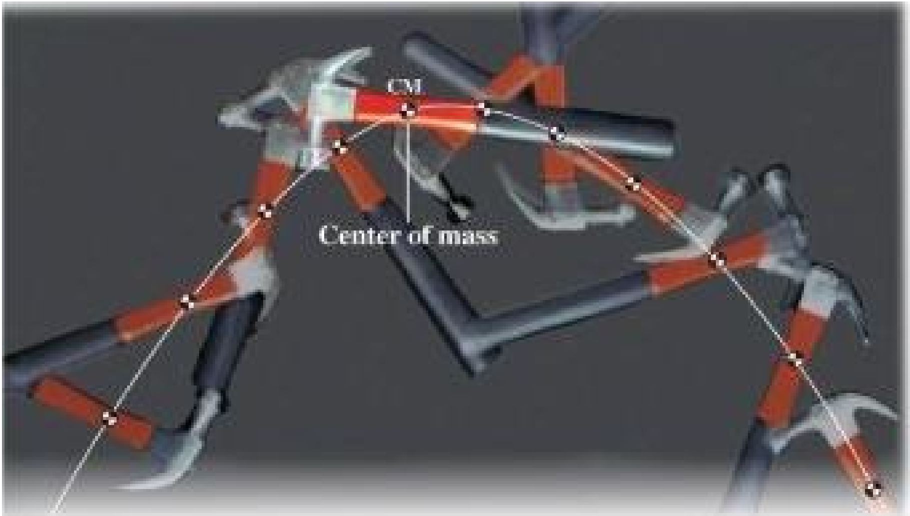
$$\frac{d}{dt} m\boldsymbol{r}_c = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{N} m_n \boldsymbol{r}_n \tag{17}$$

$$m\boldsymbol{v}_c = \sum_{n=1}^{N} m_n \boldsymbol{v}_n \tag{18}$$

$$m\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{p}.$$

Импульс системы равен произведению массы системы на скорость центра масс системы.

Теорема о движении центра масс



Из

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{p}_n = \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\Phi}_n$$

и

$$m\boldsymbol{v}_c = \sum_{n=1}^{N} m_n\boldsymbol{v}_n = \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{p}_n$$

$$m\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{p}$$

$$m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_c = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{\Phi}_n \tag{19}$$

которая является теоремой о движении центра масс:

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Теорема о движении центра масс

Для замкнутой системы полный импульс сохраняется, соответственно, скорость центра масс:

$$\boldsymbol{v}_c = \mathrm{const} \tag{20}$$

Центр масс ЗАМКНУТОЙ системы движется прямолинейно и равномерно или находится в покое.

Этим можно пользоваться и рассматривать систему отсчета жестко связанную с центром масс системы и называемой системой центра масс, которая является ИСО.

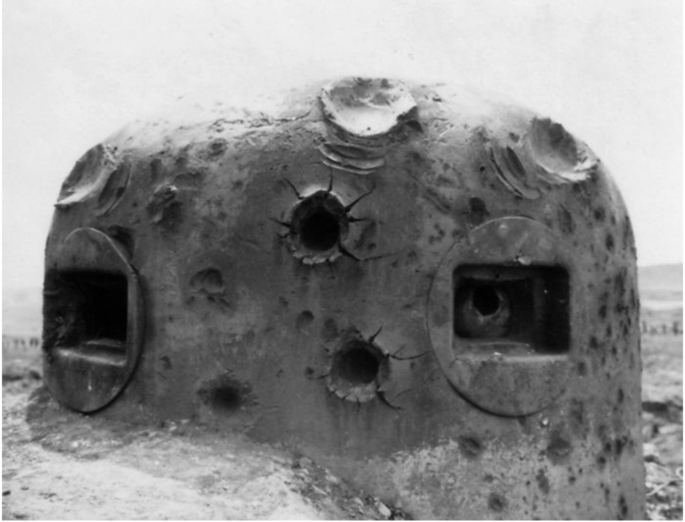
Удар

Удар твердых тел (твердых тел с жидкостью) – это совокупность явлений, возникающих при столкновении движущихся друг относительно друга тел

Примеры: удар струи и твердое тело, удар тела о поверхность жидкости, действие ударной волны и т.п.

Промежуток времени, в течении которого длится удар обычно очень мал $10^{-5}..10^{-4}$ с, а развивающиеся на площадях контакта соударяющихся тел силы очень велики.

Следствием удара могут быть остаточные деформации (вмятины), звуковые колебания, нагревание тел, упрочнение материала и даже разрушение материала в месте удара.



Удар

Процесс соударения можно разделить на две фазы:

- первая фаза начинается с момента соприкосновения тел друг с другом и уменьшения модуля разности проекции скоростей $|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|$ на общую нормаль (линия удара, которую обозначим как ось x). К концу первой фазы сближение тел прекращается, часть их кинетических энергий переходит в энергию упругой деформации.

- Вторая фаза — происходит обратный переход энергии упругой деформации в кинетическую энергию тел, при этом тела начинают расходится и к концу фазы скорость расхождения равна $\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_2'$.

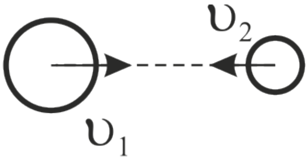
У реальных тел при ударе механическая энергия восстанавливается лишь частично, в следствие потерь на образование остаточных деформаций, нагревания, генерации звуковых волн и т.п. Для учета этих потерь вводится коэффициент восстановления k, который зависит от физических свойств тел

$$k = \frac{|\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_2'|}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}. \tag{21}$$

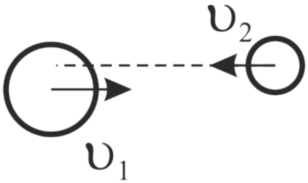
- Для абсолютно упругого удара $k = 1$
- Для абсолютно неупругого удара $k = 0$.

Удар

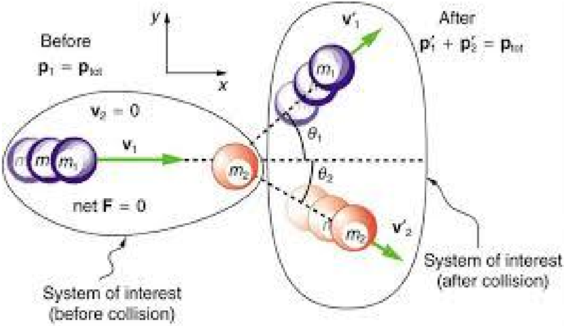
Удар называется центральным, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара,



в противном случае удар нецентральный.



Если скорости тел параллельны линии удара, то удар называется прямым, в противном случае — косым.

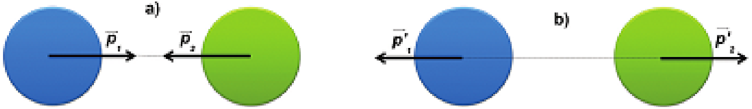


y
x
Before
p1 = ptot
v2 = 0
v1
m1
m2
net F = 0
System of interest
(before collision)
v'1
After
p'1 + p'2 = ptot
m1
θ1
θ2
m2
v'2
System of interest
(after collision)

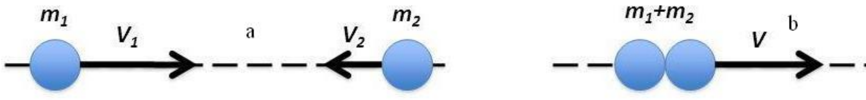
Удар

Рассмотрим два предельных случая.

- абсолютно-упругий центральный удар



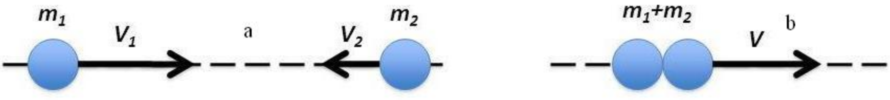
- неупругий прямой центральный удар



- Абсолютно упругий удар – это удар при котором механическая энергия сохраняется. В конце второй фазы $|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2| = |\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_2'|$.
- Абсолютно неупругий удар – это удар, при котором механическая энергия не сохраняется, причем после удара тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо находятся в покое. Процесс столкновения завершается к концу первой фазы.

Абсолютно неупругий прямой центральный удар

Рассмотри столкновение двух тел, движущихся со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ в горизонтальной плоскости.



Пусть внешние силы отсутствуют или взаимно компенсируются. Эти тела образуют замкнутую систему.

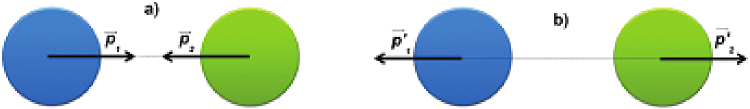
Требуется найти скорость $\boldsymbol{v}'$ тел после столкновения, причем известно, что $\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}'$. Запишем закон сохранения импульса

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}'. \tag{22}$$

$$\boldsymbol{v}' = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{23}$$

Абсолютно упругий прямой центральный удар

Рассмотрим столкновение двух тел, движущихся со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ в горизонтальной плоскости.



Пусть внешние силы отсутствуют или взаимно компенсируются. Эти тела образуют замкнутую систему.

Требуется найти скорости $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$ тел после столкновения. Запишем 1) закон сохранения импульса

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2'. \tag{24}$$

2) закон сохранения энергии

$$m_1\frac{v_1^2}{2} + m_2\frac{v_2^2}{2} = m_1\frac{(v_1')^2}{2} + m_2\frac{(v_2')^2}{2} + Q \tag{25}$$

При упругом столкновении $Q = 0$, то достаточно ограничится законом сохранения кинетической энергии

$$m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} = m_1 \frac{(v_1')^2}{2} + m_2 \frac{(v_2')^2}{2} \tag{26}$$

Преобразуем (26) так

$$m_1(v_1^2 - (v_1')^2) = m_2((v_2')^2 - v_2^2). \tag{27}$$

Учитывая, что

$$v_1^2 - (v_1')^2 = (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1')(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1') \tag{28}$$

запишем (27)

$$m_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1')(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1') = m_2(\boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2)(\boldsymbol{v}_2' + \boldsymbol{v}_2) \tag{29}$$

С учетом закона сохранения импульса

$$m_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1') = m_2(\boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2)$$

получаем выражение для скоростей

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_2' + \boldsymbol{v}_2 \tag{30}$$

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_2 \tag{31}$$

Подставляя выражение для $\boldsymbol{v}_2'$ в (24) и преобразуя его получим выражение для

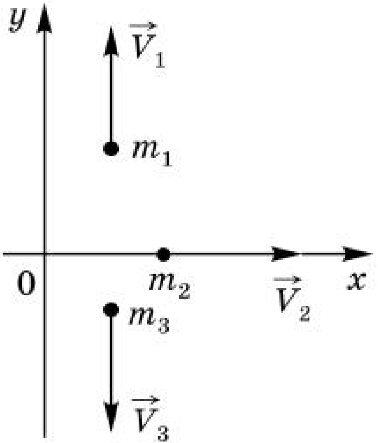
$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_1' - m_2\boldsymbol{v}_2 \tag{32}$$

$$\boldsymbol{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\boldsymbol{v}_1 + 2m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{33}$$

Подставляя выражение для $\boldsymbol{v}_1'$ в формулу $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_2$, получаем

$$\boldsymbol{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\boldsymbol{v}_2 + 2m_1\boldsymbol{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{34}$$

ТЕСТ 4



Система состоит из трех шаров с массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг, которые движутся так как показано на рисунке. Если скорости шаров равны $v_1 = 3$ м/с, $v_2 = 2$ м/с, $v_3 = 1$ м/с, то величина скорости центра масс этой системы в м/с равна ...