

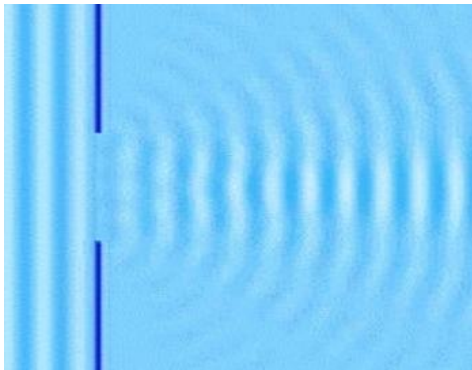
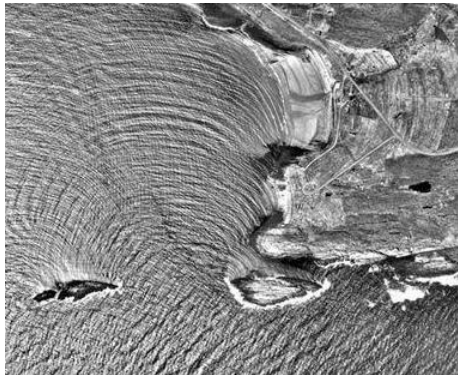
Лекция 07. Дифракция волн. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске. Дифракция Фраунгофера на щели и дифракционной решётке.

Штыгашев А.А.

Новосибирск, НГТУ

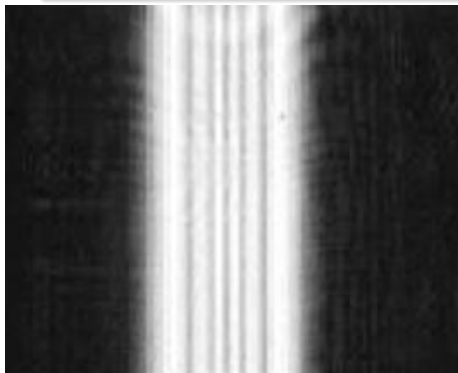
Дифракция волн

Дифракция волн - это любые отклонения при распространении волн произвольной природы от законов геометрической оптики, в более узком смысле – огибание волнами препятствий.



Дифракция света

Дифракцией света называют совокупность явлений, обусловленных взаимодействием света со средой и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики.

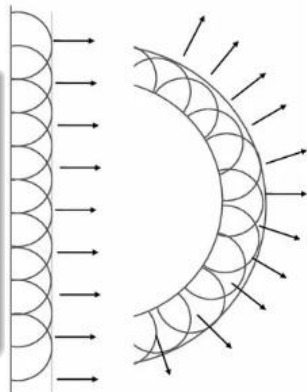


Это огибание световыми волнами различных препятствий, проникновение света в область геометрической тени.

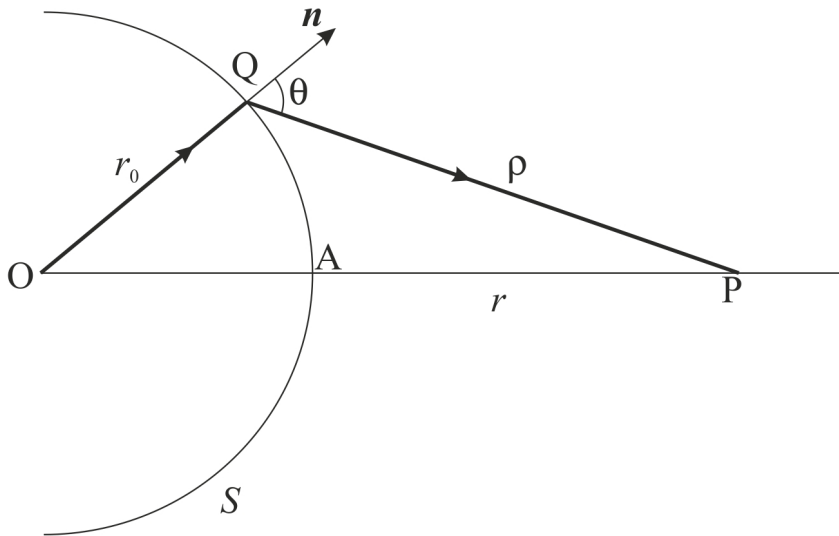
На рисунке дифракция света на тонком проводнике $d \gg \lambda$

Принцип Гюйгенса-Френеля

Каждый элемент поверхности фронта волны является центром одной из элементарных волн, передняя огибающая которых становится волновой поверхностью фронта волны в следующий момент времени, а задняя огибающая поверхность не образуется, в следствие деструктивной интерференции элементарных волн.



Математическая запись принципа Гюйгенса-Френеля имеет вид интеграла. Волновое возмущение в некоторой точке P , создаваемое источником света в точке O есть результат интерференции вторичных элементарных волн, излучаемых каждым элементом поверхности dS некоторой волновой поверхности S радиуса r_0 .



Амплитуда вторичных волн пропорциональна амплитуде первичной волны, приходящей в точку Q, площади элемента dS , т.е.

$$dE(P) = \left(\frac{A}{r_0} e^{i\omega t - ikr_0} \right) (dS) \left(\frac{K(\theta)}{\rho} e^{-ik\rho} \right) \quad (1)$$

Функция $K(\theta)$ описывает зависимость амплитуды вторичных волн от угла θ , явный вид которого **постулирован** Кирхгофом (1882) в виде

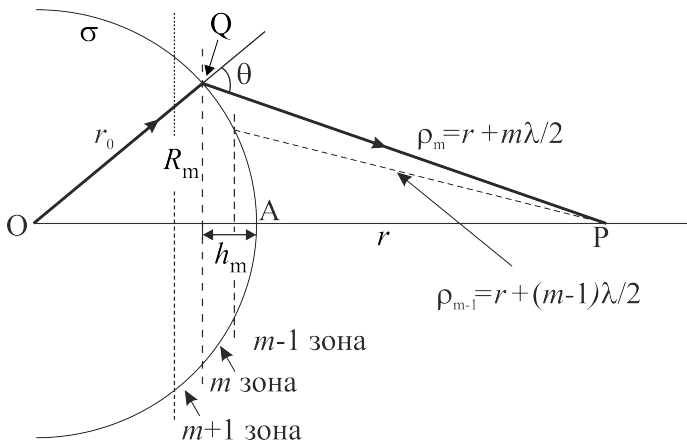
$$K(\theta) = \frac{ik}{4\pi} (1 + \cos \theta) \quad (2)$$

$$E(P) = \left(\frac{A}{r_0} e^{i\omega t - ikr_0} \right) \int_S dS K(\theta) \left(\frac{1}{\rho} e^{-ik\rho} \right) \quad (3)$$

Приближенный метод расчета интеграла (3) предложил Френель, суть метода заключалась в замене интегрирования суммированием по вкладам от кольцевых участков волновой поверхности S , называемых **зонами Френеля**.

Метод зон Френеля

Для этого рассекаем волновую поверхность S плоскостями перпендикулярными прямой OP , так чтобы расстояние ρ_m от внешнего края m -й зоны отличалось от смежных ρ_{m-1} и ρ_{m+1} на $\lambda/2$.



В виду малости длины волны λ света, по сравнению со всеми остальными расстояниями, то в пределах зоны Френеля r и $K(\theta)$ практически постоянные величины, тогда вклад m -й зоны в интеграл (3) будет равен

$$E_m = \left(\frac{A}{r_0} e^{i\omega t - ikr_0} \right) K(\theta_m) \int_{S_m} dS \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \quad (4)$$

Расчет радиуса r_m и высоты шарового сегмента h_m зоны Френеля

$$\begin{aligned} R_m^2 &= r_0^2 - (r_0 - h_m)^2, \\ R_m^2 &= (r + m\lambda/2)^2 - (r - h_m)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразуем каждое выражение

$$\begin{aligned} R_m^2 &= 2r_0h_m - h_m^2, \\ R_m^2 &= rm\lambda - 2rh_m - h_m^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Сравниваем правые части выражений

$$2r_0h_m - h_m^2 = rm\lambda - 2rh_m - h_m^2$$
$$h_m = \frac{rm\lambda}{2(r_0 + r)} \quad (7)$$

Подставляем (7) в (5), получаем

$$R_m = \sqrt{\frac{r_0r}{r_0 + r}m\lambda} \quad (8)$$

Площадь m -й зоны Френеля

Из курса элементарной геометрии известна формула площади шарового сегмента

$$S_m = 2\pi r_0 h_m \quad (9)$$

Тогда площадь m -й зоны Френеля равна

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = 2\pi r_0 (h_m - h_{m-1}) = \frac{\pi r_0 r}{r_0 + r} \lambda \quad (10)$$

Как видно, площадь сферического кольца (m -й зоны Френеля) волновой поверхности S не зависит от номера m зоны.

Установим непрозрачный экран с отверстием круглой формы между точечным источником света S и точкой наблюдения P перпендикулярно оптической оси SP .

Если N есть общее число зон Френеля, вносящих вклад в световое возмущение в точке наблюдения P , то результирующая амплитуда представляется знакопеременной суммой

$$E(P) = E_1 + E_2 + \dots + E_N, \quad (11)$$

Соседние зоны Френеля вносят в результирующее световое возмущение в точке Р практически равные вклады

$$E_{m-1}, E_m, E_{m+1},$$

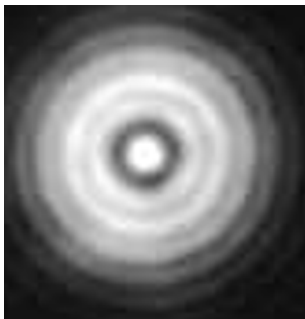
но противоположных знаков, причем из-за монотонно убывающей функции K_m :

$$|E_{m-1}| \geq |E_m| \geq |E_{m+1}| \quad (12)$$

Пусть N нечетное число зон Френеля, тогда сумму (11) представим

$$E(P) = \frac{1}{2}E_1 + \left(\frac{1}{2}E_1 + E_2 + \frac{1}{2}E_3\right) + \dots \\ + \left(\frac{1}{2}E_{N-2} + E_{N-1} + \frac{1}{2}E_N\right) + \frac{1}{2}E_N$$

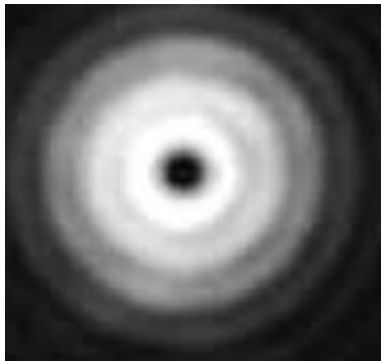
Если $N \rightarrow \infty$, то результирующее возмущение равно $E_1/2$.



Пусть N четное число зон Френеля, тогда сумму (11) представим

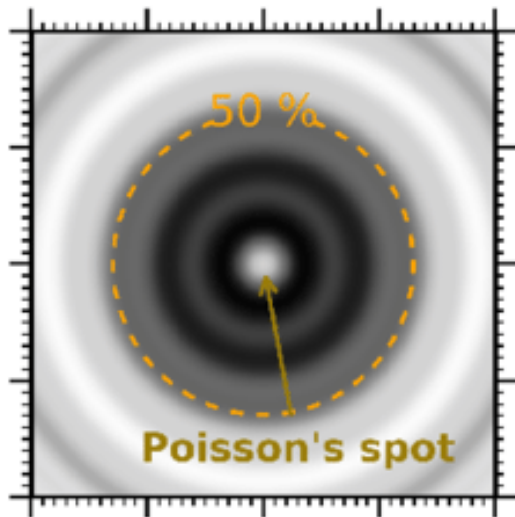
$$E(P) = (E_1 + E_2) + (E_3 + E_4) + \dots + (E_{N-1} + E_N) \approx 0 \quad (13)$$

в которой происходит практически полная компенсация вкладов.



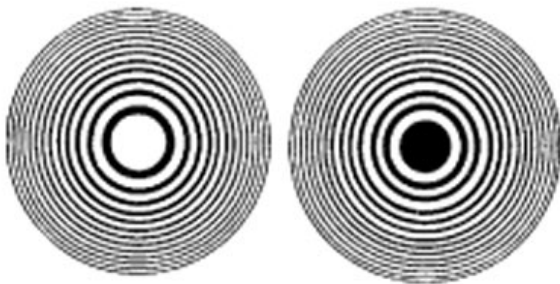
Если закрыть несколько зон Френеля, например непрозрачным диском, то согласно (11), в области геометрической тени в точке Р будет ненулевое световое возмущение. Исторически именно этот факт, сформулированный Пуассоном и проведенный экспериментально Араго, стал ключевым фактом для торжества волновой теории света.

Opaque disc



Зонная пластинка

Если взять экран, пропускающий только нечетные (четные) зоны Френеля, то суммарное воздействие только нечетных (четных) зон будет значительно больше действия, создаваемого полностью открытым волновым фронтом. Такой экран называется **зонной пластинкой**.



Фазовая зонная пластинка

Если взять прозрачный экран и изменять толщину экрана так, чтобы в точке наблюдения P все вклады от всех зон (нечетных и четных) приходили в одинаковой фазе, то такой экран по принципу действия сходный с собирающей линзой и такой экран называется **фазовой зонной пластинкой**.



Волновой параметр (параметр дифракции)

При описании дифракции можно выделить три параметра:

- длину волны λ ;
- характерный размер оптической неоднородности D (объекта), например, непрозрачное препятствие, щель, круглая диафрагма и т.п.;
- характерное расстояние ρ (от источника до объекта или от объекта до точки наблюдения).

Параметром p дифракции является величина равная

$$p = \frac{D^2}{\rho\lambda} \quad (14)$$

- При $p \gg 1$ дифракцией света можно пренебречь, область геометрической оптики,
- При $p \ll 1$ дифракцию света необходимо учитывать, в этом случае дифракция Фраунгофера.
- в остальных случаях (переходная область для параметра дифракции) - наблюдается дифракция Френеля

Оценка параметра дифракции применительно к параметрам установки в лабор. работе № 32.

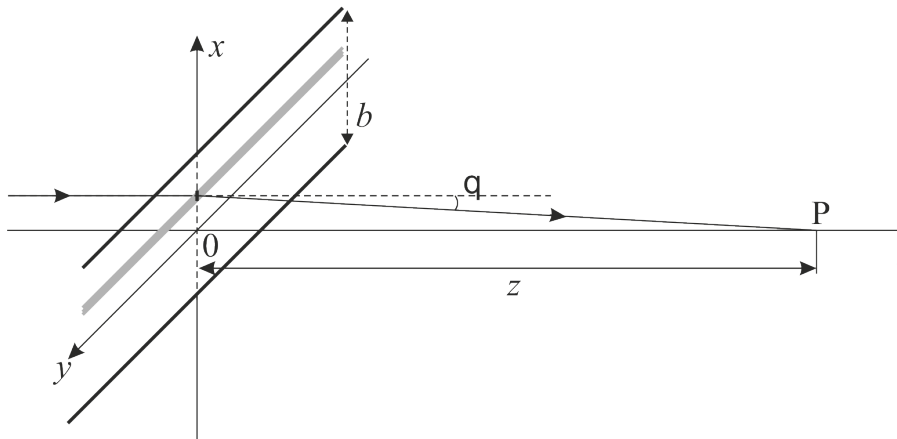
Пусть $\lambda = 0.63$ мкм, $\rho = 0.4$ м и $D = 10$ мкм, тогда параметр дифракции

$$p = 10^{-10} / 0.4 \cdot 0.63 \cdot 10^{-6} \approx 4 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

т.е. дифракцию света можно рассматривать в **приближении Фраунгофера**.

Дифракция Фраунгофера на щели

Рассмотрим дифракцию света на узкой щели шириной b , такой что $p \approx b^2/z\lambda \ll 1$, где b - характерный размер препятствия (ширина щели b), т.е. **дифракция Фраунгофера**.



Так как падающая на экран с щелью волна является плоской волной, то интеграл (3) запишется

$$E(P) = \left(A e^{i\omega t} \right) \int_S dS \left(\frac{K(\theta)}{\rho} e^{-ik\rho} \right) \quad (15)$$

где мы отбросили фазу kr_0 , так как при $r_0 \rightarrow \infty$ фаза kr_0 неопределена, также $\theta \ll 1$,

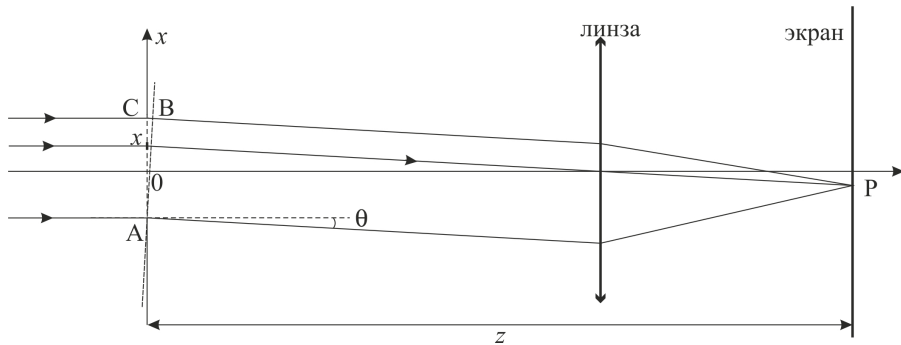
$$K(\theta) = ik(1 + \cos \theta)/4\pi \approx i/\lambda$$

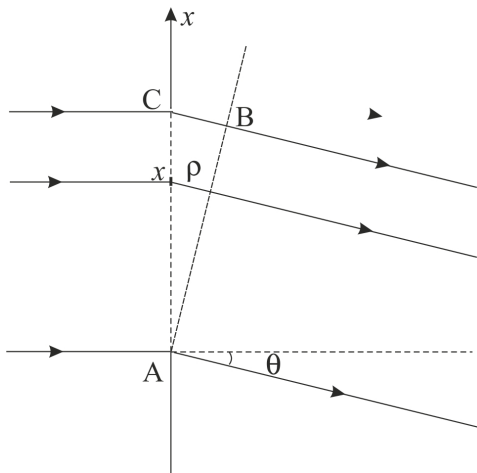
.

Пусть $dS = ydx$, причем $b \ll y$ и, так как, по выбору координатных осей, щель параллельна оси y , тогда волновая поверхность падающей плоской волны, плоскость щели и плоскость экрана параллельны друг другу, а волновые поверхности дифрагированной волны будут **цилиндрическими** с образующими, параллельными оси y .

Так как $b \ll y$ световое возмущение в любой плоскости перпендикулярной оси y будет одинаковой, следовательно, достаточно исследовать дифракцию света в плоскости $y = 0$.

Для увеличения интенсивности дифрагированного **нелазерного** света, как правило, используют линзу, а экран помещают в фокальную плоскость линзы, тогда в плоскости экрана фокусируются в одну точку все рассеянные параллельные лучи под углом θ к оси z , весь экран будет представлять серию параллельных оси y линий, которые называются **«спектральными» линиями**, а распределение интенсивности на экране называется **спектром пространственных частот**.





Для параллельных лучей, рассеянных под углом θ , оптическая длина для пути от плоскости, содержащей сечение АВ и перпендикулярной плоскости xOz , до точки Р одинакова. Следовательно, физический интерес представляет область образованную плоскостями $z = 0$ и плоскостью проходящей через АВ и перпендикулярной плоскости xOz .

$$E(P) = \left(A e^{i\omega t} \right) \frac{i}{\lambda z} y \int_{-b/2}^{b/2} dx e^{-ik\rho} \quad (16)$$

Здесь в знаменателе дроби использовалось сильное неравенство $z \gg \sqrt{b\lambda}$, позволяющее заменить $\rho \rightarrow z$, а в показателе экспоненты, из-за одинаковой оптической длины путей параллельных лучей, заменяем интегрированием в узком клине, образованном плоскостями АВ и АС, тогда фаза дифрагирующих лучей есть $ik\rho$, где $\rho = x \sin \theta$.

Интегрируя (16), получаем

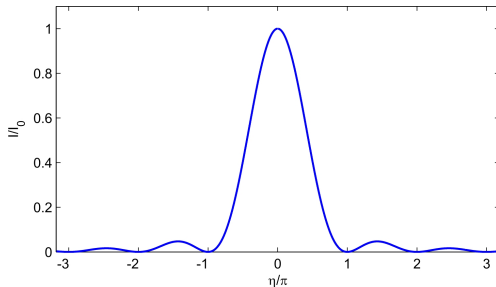
$$E(P) = \left(A e^{i\omega t} \right) \frac{i A y b \sin \eta}{\lambda z} \frac{1}{\eta}, \quad (17)$$

$$\eta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta.$$

Условие минимума интенсивности света

Интенсивность света дифрагированного под углом θ пропорциональна $I \sim EE^*$, тогда

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 \quad (18)$$



Минимумы интенсивности света определяются из условия

$$\eta_m = m\pi,$$

или

$$b \sin \theta_m = m\lambda \quad (19)$$

Положение максимумов находятся из решения задачи на экстремум

$$dI/d\eta = 0,$$

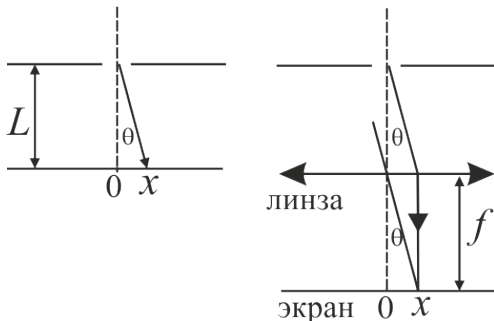
что приводит к трансцендентному уравнению

$$\eta = \tan \eta$$

.

Часто требуется построить график распределения интенсивности

$$I = I(x)$$



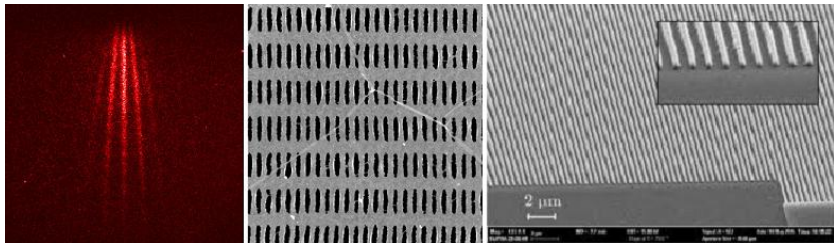
Если в установке нет линзы, то пересчет $x = L \tan \theta$.

Если экран находится в фокальной плоскости линзы, то $x = f \tan \theta$.

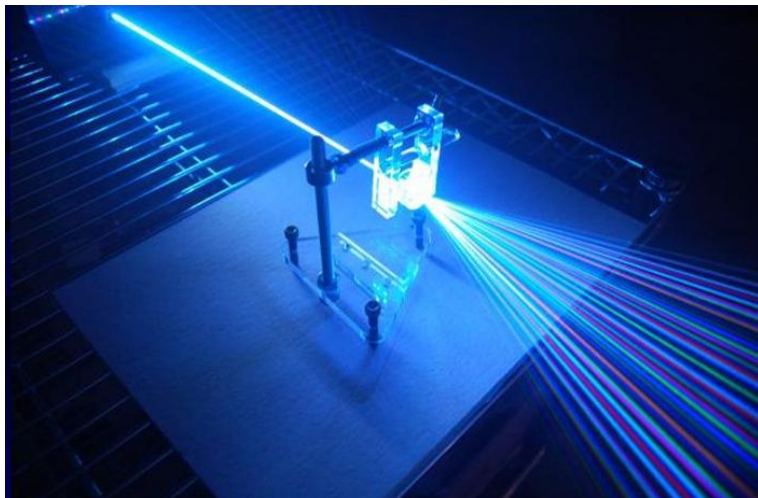
Дифракция Фраунгофера на многих щелях.

Дифракционная решетка

Дифракционной решеткой называют оптический элемент, представляющий собой совокупность большого числа регулярно расположенных штрихов (канавок, щелей, выступов), нанесенных на плоскую или вогнутую оптическую поверхность.



Дифракционные решетки используются в спектральных приборах в качестве диспергирующей среды для пространственного разложения света в спектр.



Рассмотрим амплитудную дифракционную решетку, представляющую собой совокупность одинаковых отстоящих друг от друга на расстояние d щелей шириной b каждая.

Расстояние d называется периодом дифракционной решетки. Пусть в решетке N щелей, тогда используем принцип суперпозиции волн для сложения волн рассеянных на некоторый угол θ

$$E(P) = E_1 + E_2 + \dots + E_N \quad (20)$$

Аналогично, как рассматривалась дифракция на одной щели, получаем

$$E(P) = E(\theta)e^{ik\rho} + E(\theta)e^{ik\rho+ik\Delta} + \dots + E(\theta)e^{ik\rho+ik(N-1)\Delta} \quad (21)$$

Выносим одинаковый сомножитель

$$E(P) = E(\theta)e^{ik\rho} \left(1 + e^{ik\Delta} + \dots + e^{ik(N-1)\Delta}\right) \quad (22)$$

где $k\Delta = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$, $E(\theta)$ - амплитуда светового поля определяемая дифракцией на **одной** щели.

Учитывая известную формулу геометрической прогрессии

$$\sum_{m=0}^N x^m = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \quad (23)$$

результатирующую амплитуду света запишем

$$E(P) = E(\theta) e^{ik\rho} \frac{1 - e^{ikN\Delta}}{1 - e^{ik\Delta}} = E(\theta) e^{ik\rho + ik(N+1)\Delta/2} \frac{\sin N\Lambda}{\sin \Lambda} \quad (24)$$

где

$$\Lambda = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta.$$

Дифракция света на решетке

Интенсивность света запишется в виде

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\Lambda}{\sin \Lambda} \right)^2 \quad (25)$$

Выражение для интенсивности усложнилось, помимо условия минимумов (19) добавились условия главных максимумов интенсивности

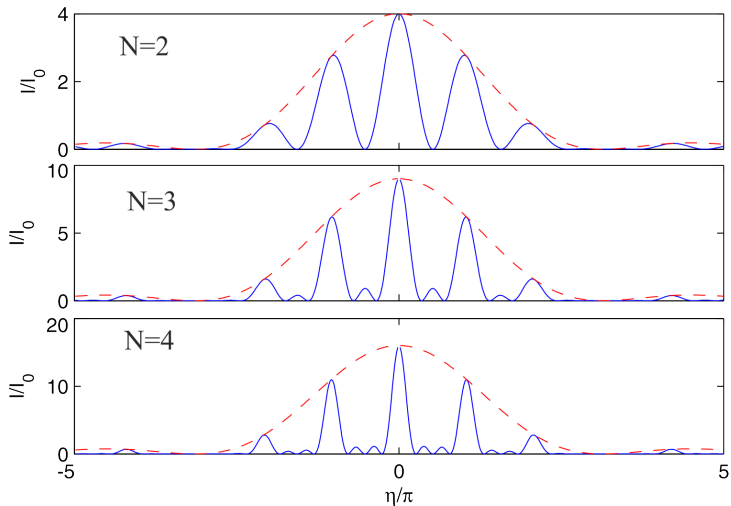
$$\Lambda_n = n\pi, \quad d \sin \theta_n = n\lambda. \quad (26)$$

Условия для вторичных максимумов более сложные, определяются равенством нулю производной $dI/d\lambda = 0$.

Вторичные минимумы определяются условием

$$N\Lambda'_m = m'\pi, \quad d \sin \theta'_m = \frac{m'}{N} \lambda, \quad m' = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (27)$$

Распределение интенсивности света



Параметры: $d = 30$ мкм, $b = 10$ мкм, $\lambda = 0.65$ мкм, $N = 2, 3, 4$

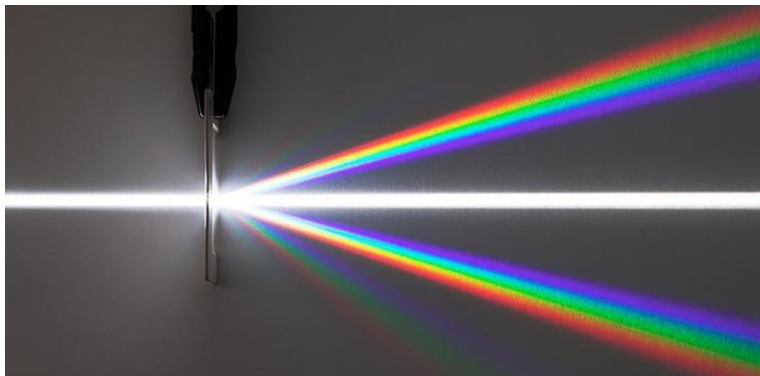


Угловой дисперсией называют величину равную

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} \quad (28)$$

которая характеризует угловое расстояние между соседними спектральными линиями (главными максимумами).

$$D = \frac{d}{d\lambda} \arcsin \left(\frac{m\lambda}{d} \right) = \frac{m}{d\sqrt{1 - (m\lambda/d)^2}} \quad (29)$$



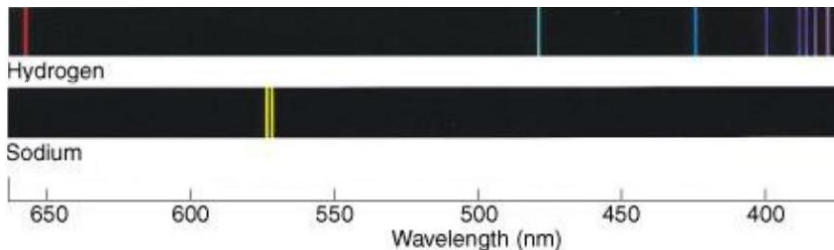
Разрешающая способность оптического прибора

Разрешающей способностью (силой) оптического прибора определяется отношением минимальной разностью длин волн $\Delta\lambda$, при которой две спектральные линии воспринимаются раздельно

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (30)$$

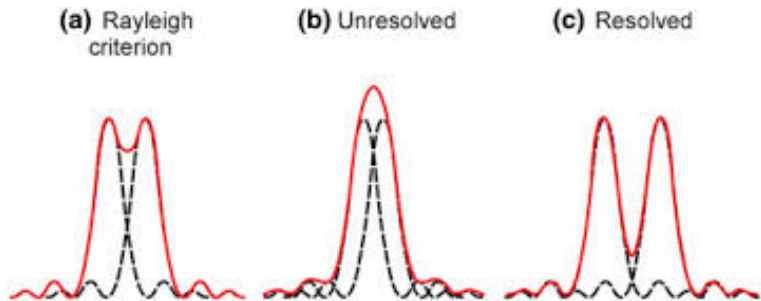
Пример

Какой наименьшей разрешающей силой должна обладать дифракционная решетка, чтобы с ее помощью можно было разрешить две спектральные линии натрия $\lambda_1 = 589.0$ нм и $\lambda_2 = 589.6$ нм? Какое наименьшее число штрихов должна иметь решетка, чтобы разрешение дублета было возможно в спектре второго порядка?



$$R = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{589}{0.6} = 982, \quad R = mN, \quad N = \frac{R}{m} = \frac{982}{2} = 491$$

В пространственном спектре две спектральные линии с длинами волн λ_1 и λ_2 воспринимаются раздельно, если середина одного максимума, соответствующего длине волны λ_1 совпадает с минимумом соседнего, соответствующем λ_1 :



$$\begin{aligned}d \sin \theta_m &= m \lambda_1, \\d \sin \theta_m &= \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda_2\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}m \lambda_1 &= \left(m + \frac{1}{N}\right) \lambda_2 \\m(\lambda_1 - \lambda_2) &= \frac{1}{N} \lambda_2\end{aligned}\tag{32}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = mN$$

$$R = \frac{\lambda_2}{\Delta \lambda} = mN.\tag{33}$$

Критерий Релэя. Круглое отверстие

Критерий Рэля для разрешающей способности круглого отверстия (апертуры) определяются формулой:

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (34)$$

где θ – угол, в котором объекты разделены, λ – длина волны света, D – диаметр апертуры.



(a)



(b)



(c)



Перечислите номера правильных утверждения, касающихся распределения интенсивности света при дифракции света на дифракционной решетке

- 1. Если на дифракционную решетку падает белый свет, то дифракционные максимумы для лучей разного цвета расходятся.
- 2. Нулевые максимумы для всех длин волн разные.
- 3. Спектры получаются тем более четкие, чем больше щелей содержит решетка при прочих равных условиях.
- 4. Синусы углов дифракции, под которыми видны отдельные линии, прямо пропорциональны длинам волн этих линий.