Семинар 30

Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Постановка задачи: Вычислить $I = \int\limits_a^b f(x)dx$

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и известна $F(x)$, то

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Но иногда найти $F(x)$ невозможно. В этих случаях интеграл вычисляется приближенно.

I - некоторое число.

$\hat{I}$ - приближенное значение.

$\left|\hat{I} - I\right| = \Delta$- абсолютная погрешность.

Тогда 2 задачи:

1) Найти $\hat{\boldsymbol{I}}$ и оценить $\boldsymbol{\Delta}$.

2) Найти $\hat{\boldsymbol{I}}$ с заданной $\boldsymbol{\Delta}$, т. е. подобрать метод вычислений: $\left|\hat{\boldsymbol{I}} - \boldsymbol{I}\right| < \boldsymbol{\Delta}$.

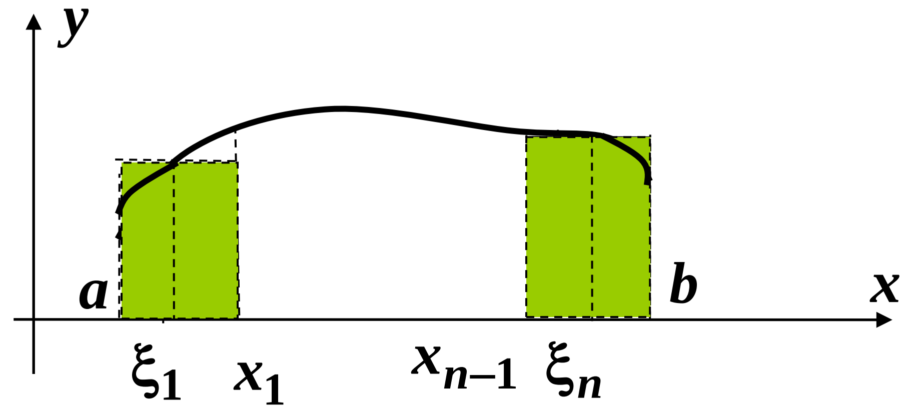
Метод средних прямоугольников

Нужно вычислить $I = \int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ - непрерывная функция.

Для простоты $f(x) \geq 0$. Разобьем $[a;b]$ на n равных частей точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k \quad k = \overline{1, n-1}, \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$ - *шаг разбиения*.

На каждом $[x_k; x_{k-1}]$ выберем $\xi_k = \frac{(x_k + x_{k-1})}{2}$ и вычислим $f(\xi_k) = y_k$.



Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \,.$$

Следовательно, $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k$. Это формула средних прямоугольников

Пусть $\exists\ f''(x)$ на $[a;b]$. можно показать, что

$$\Delta(n) \le M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}, \quad \text{где } M_2 = \sup_{[a;b]} \left| f''(x) \right|.$$

Пример 171. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ с ошибкой $\Delta = 0{,}01$.

Решение. Сначала определим n.

$$\sup_{[0;1]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{24n^2} \le 0{,}01. \qquad f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2};$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}. \qquad \sup_{[0;1]} |f''(x)| = \sup_{[0;1]} \frac{2}{(1+x)^3} = 2.$$

$$2 \cdot \frac{1}{24n^2} \le 0{,}01 \qquad n^2 \ge \frac{25}{3} \qquad \boxed{n=3}\,.$$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{3}=\frac{1}{3},\qquad y_k=\frac{1}{1+\xi_k},\qquad \xi_k=\frac{(x_{k-1}+x_k)}{2},\quad k=\overline{1,3}.$$

k	ξ_k	y_k
1	1/6	6/7
2	3/6	6/9
3	5/6	6/11

$$I=0,69315$$

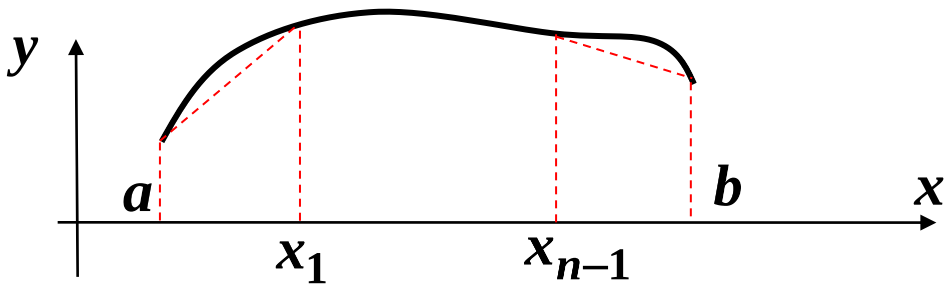
$$\sum_{k=1}^{3} y_k=\frac{478}{231}\qquad \int_0^1\frac{dx}{1+x}\approx\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} y_k=\frac{478}{693}=0,6897\pm\Delta.$$

$$\Delta\le\sup_{[0;1]}\left|f''(x)\right|\frac{(b-a)^3}{24n^2}=2\cdot\frac{1}{24\cdot 9}=\frac{1}{108}=0,0093.$$

Ответ. 0,6897.

Метод трапеций

Разобьем **[*a*;*b*]** на ***n*** равных частей $x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = \overline{1,n}$ и построим ***n*** трапеций.



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}(x_1 - x_0) + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \left| y_k = f(x_k), \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \right| = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) =$$

$$= \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n) = \hat{I}(n).$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0 \Rightarrow \hat{I}(n) \to I$$

$$\Delta(n) \le \sup_{[a;b]} \left| f''(x) \right| \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

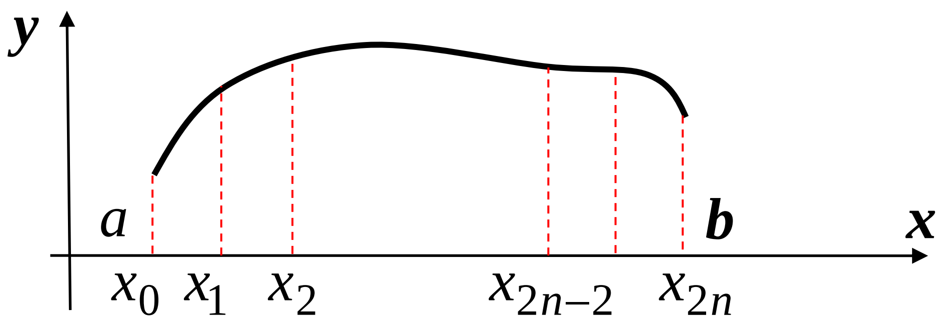
Метод параболических трапеций.

(Метод Симпсона)

Заменяем график подынтегральной функции дугами парабол, оси которых параллельны оси Oy.

Разобьем отрезок интегрирования $[a;b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{2n} = b$ на $2n$ равных частей, $y_0, ..., y_{2n}$ - значения функции в точках деления.

$$y_k = a_k x^2 + b_k x + c_k, \qquad \frac{b-a}{2n} = h, \qquad x_k = a + \frac{b-a}{2n} k, \qquad k = 0, ..., 2n.$$



В силу аддитивности определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx.$$

Через каждые три точки можно провести параболу

$$y_k(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k.$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} (a_n x^2 + b_n x + c_n)dx.$$

$$\int_{x_0}^{x_2}\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)dx=\frac{a_1}{3}\left(x_2^3-x_0^3\right)+\frac{b_1}{2}\left(x_2^2-x_0^2\right)+$$

$$+c_1\left(x_2-x_0\right)=\frac{x_2-x_0}{6}\left(2a_1\left(x_2^2+x_2x_0+x_0^2\right)+3b_1\left(x_2+x_0\right)+6c_1\right)=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left(a_1x_0^2+b_1x_0+c_1+4a_1\left(\frac{x_2+x_0}{2}\right)^2+4b_1\frac{x_2+x_0}{2}+4c_1+a_1x_2^2+b_1x_2+c_1\right)=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left(y_0+4y_1+y_2\right).$$

Просуммируем интегралы

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}\left(a_kx^2+b_kx+c_k\right)dx=\frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})$$

или $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) +$

$+4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}))$.

Это ***формула парабол*** или ***формула Симпсона***

$$\boxed{\Delta(n) \le \sup_{[a;b]} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right| \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}}.$$

Для $\int\limits_a^b P_m(x)dx$, где $P_m(x)$ - многочлен m-ой степени при

$m \le 3 \to \sup\limits_{[a;b]} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right| = 0$, т.е. формула точная.

Для оценки точности можно примерять ***правило Рунге.***

Для метода Симпсона правило Рунге основано на соотношении

$\dfrac{\left|\hat{I}_{2n} - \hat{I}_n\right|}{15} < \Delta$ - заданная точность.

Если условие выполнено, то за приближенное значение интеграла принимают $\hat{I}_{2n}$, т.е.

$$I = \hat{I}_{2n} \pm \Delta.$$

Пример 172. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ с точностью

$\Delta = 0{,}001$.

Решение. Определим n $\quad \Delta(n) \le \sup\limits_{[a;b]} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right| \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{24}{(1+x^2)^5}(1-10x^2+5x^4).$$

$$\sup\limits_{[0;1]} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right| = 24 \sup\limits_{[0;1]} \left| 5x^4 - 10x^2 + 1 \right| = 24 \cdot 4 = 96.$$

$$\frac{96}{180(2n)^4} \le 0{,}001 \Rightarrow n^4 \ge \frac{100}{3} \Rightarrow n \ge 2{,}4.$$

Примем $\quad n = 3 \quad 2n = 6$

k	x_k	$y_k = \dfrac{1}{1+x_k^2}$
0	0	1
1	1/6	36/37
2	1/3	9/10
3	1/2	4/5

k	x_k	$y_k = \dfrac{1}{1+x_k^2}$
4	2/3	9/13
5	5/6	36/61
6	1	1/2

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{18}\left(1+0,5+2\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{13}\right)+4\left(\frac{36}{37}+\frac{4}{5}+\frac{36}{61}\right)\right)=0,7854.$$

$$n=3 \Rightarrow \Delta \le \frac{1}{2430} < 0,00045$$

Ответ. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,7854 \pm 0,00045.$

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана

2347, 2352.