Семинар 29

Вычисление длины дуги кривой

Дифференциал длины дуги

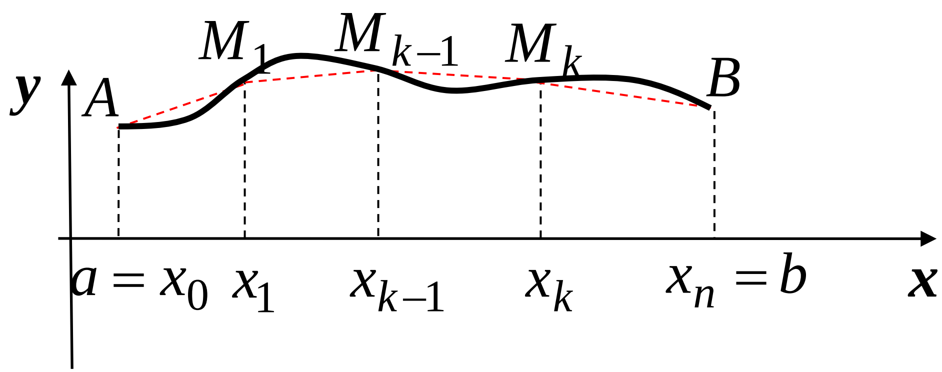
$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad \forall x \in [a;b].$$

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt, \qquad l'(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}, \qquad dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Т.к. $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то $\boxed{dl = \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{dx^2+dy^2}}$

$\boxed{dl^2 = dx^2 + dy^2}$ - аналог теоремы Пифагора.

Длина дуги плоской кривой в прямоугольной системе координат



Если $\boldsymbol{f(x)}$ имеет на $\boldsymbol{[a;b]}$ непрерывную производную, то дуга $\boldsymbol{AB}$ *спрямляемая* и ее длина

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx}.$$

Пример 165. $x^2 + y^2 = R^2$. Найти длину окружности.

Решение. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $\quad 0 \le x \le R \quad$ $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

$$\frac{1}{4} l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \int_0^R \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = R \frac{\pi}{2}.$$

Ответ. Длина окружности $\boxed{l = 2\pi R}$.

Длина дуги, когда уравнение линии задано параметрически

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1; t_2]$$

$x(t), y(t)$ - непрерывные функции с непрерывными производными.

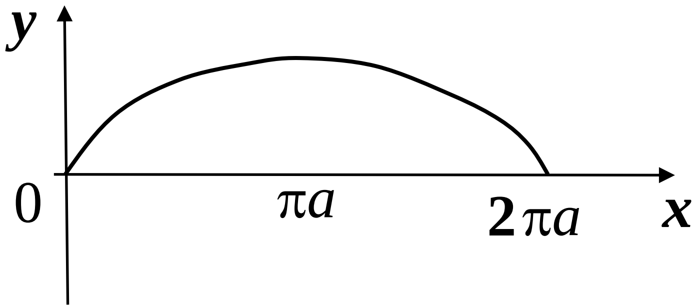
$x'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in [t_1; t_2]$

$$dx = x'(t)dt \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'(t)dt$$

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt} \; .$$

Пример 166. Найти длину дуги циклоиды $\boldsymbol{x = a(t - \sin t)}$,

$$\boldsymbol{y = a(1 - \cos t)}, \qquad \boldsymbol{0 \le t \le 2\pi}.$$



Решение. $$\boldsymbol{l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =}$$

$$\boldsymbol{= a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) =}$$

$$\boldsymbol{= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a.}$$

Ответ. Длина дуги циклоиды равна 8a.

В пространственном случае $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2$.

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt\,.$$

Пример 167. Найти длину винтовой линии

$$x = a\cos t;\ \ y = a\sin t;\ \ z = amt;\ \ 0 \le t \le 2\pi$$

Решение. $x_t' = -a\sin t$, $y_t' = a\cos t$, $z_t' = am$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+m^2}\, dt = 2\pi a\sqrt{1+m^2}\,.$$

Длина дуги в полярной системе координат

$$r = r(\varphi) \quad \forall \varphi \in [\alpha;\beta]$$

$r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$.

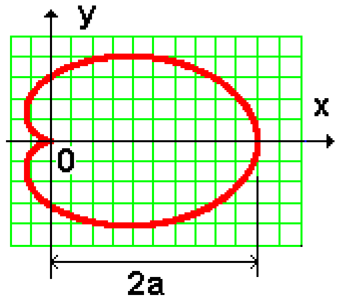
$$\left.\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad \forall \varphi \in [\alpha;\beta].$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические.

$$\left.\begin{matrix} x'_\varphi = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ y'_\varphi = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = r^2 + (r')^2$$

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi} \; .$$

Пример 168. Найти длину дуги кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$.



Решение. В силу симметрии $0 \le \varphi \le \pi \Rightarrow \dfrac{1}{2} l$, $r' = -a\sin\varphi$

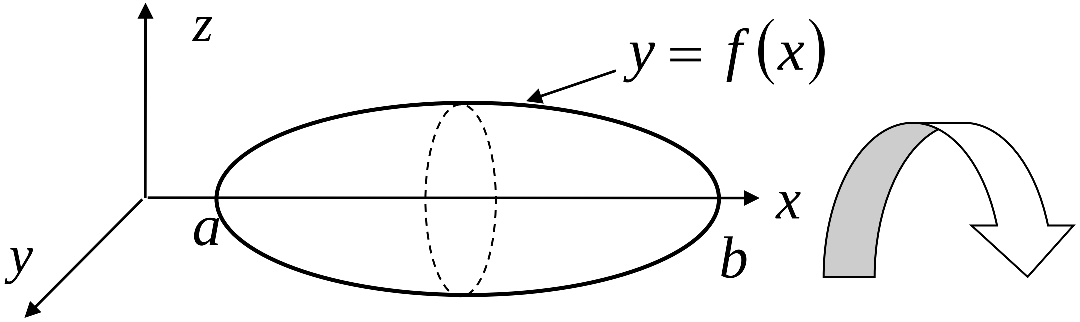
$$r^2 + (r')^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = \boxed{8a}.$$

Ответ. Длина дуги кардиоиды равна 8a.

Вычисление объемов тел вращения

$$S(x) = \pi y^2 = \pi(f(x))^2.$$



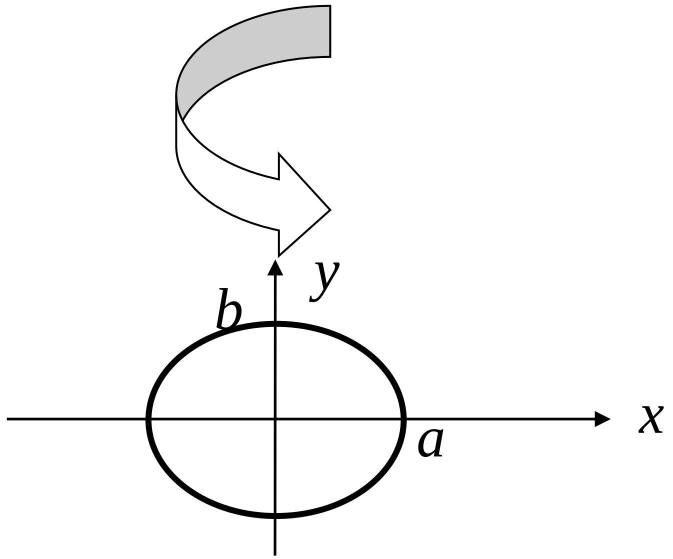
$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy.$$

$$x = \varphi(y) \quad c \le y \le d.$$

Пример 169. Вычислить объем, образованный вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ вокруг оси ***Oy***.

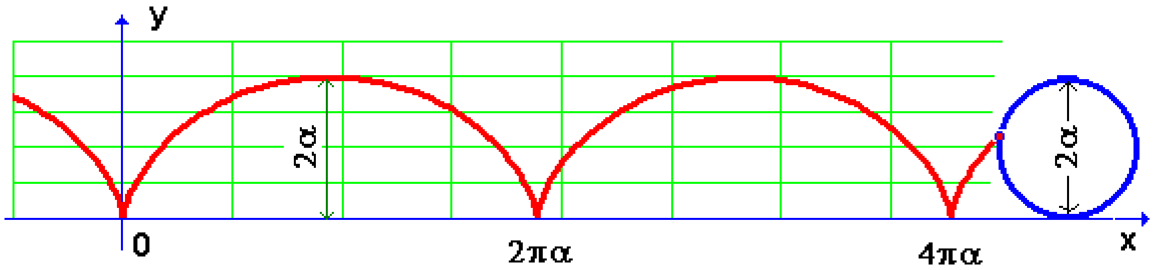


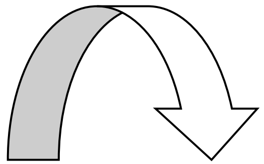
Решение. $$V=2\int_0^b \pi x^2 dy = 2\int_0^a \frac{\pi a^2}{b^2}(b^2-y^2)dy=\frac{2\pi a^2}{b^2}\left(b^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^b=$$

$$=2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^3-\frac{b^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Пример 170. Вычислить объем тела, образованного вращением одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad \text{вокруг оси } Ox \quad 0 \le t \le 2\pi$$





Решение. $V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx \qquad dx=a(1-\cos t)dt$

$x_1=0 \qquad t_1=0$

$x_2=2\pi a \quad t_2=2\pi$

$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=$$

$$=\pi a^3\left((t-3\sin t)\Big|_0^{2\pi}+3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t\right)=$$

$$=\pi a^3\cdot 2\pi+\pi a^3\left(\frac{3}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)-\sin t+\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi^2a^3+\frac{3}{2}2\pi\cdot\pi a^3=5\pi^2a^3$$

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана
2521, 2522, 2524, 2543, 2561, 2564.

Домашнее задание

1. Решить типовой расчет 3 задачи 14-15
2. Решить задачи из Бермана занятие 31