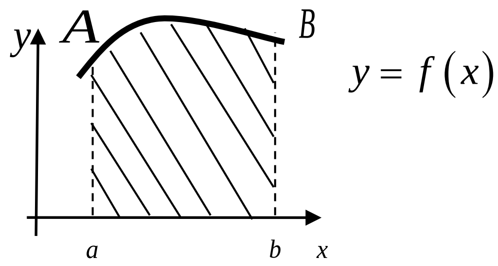
Семинар 28

Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат

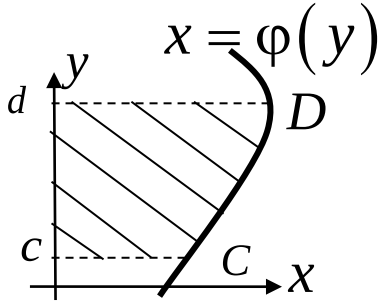
Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то из геометрического смысла определенного интеграла $\boxed{S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx} \geq 0$.



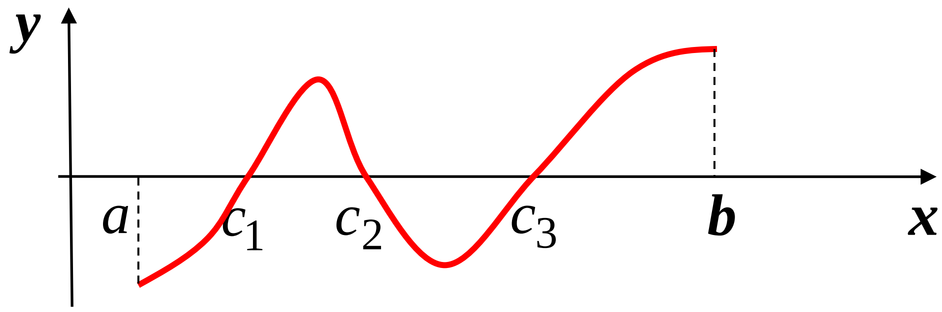
Если $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx < 0 \quad a < b$.

Следовательно, $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = -\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b ydx$.

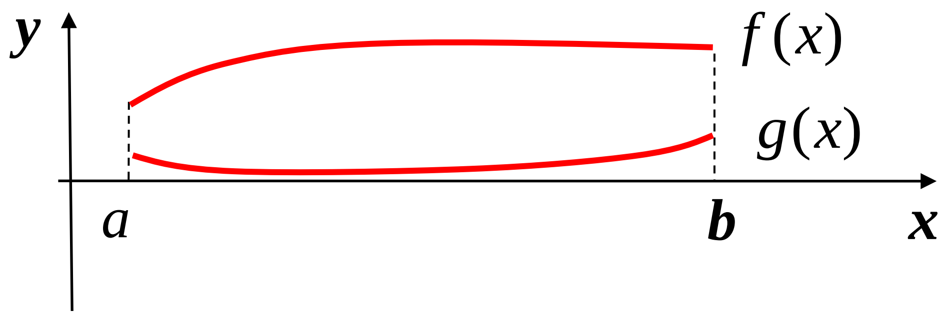
Пусть $\boldsymbol{x=\varphi(y)\geq 0}$, $\boldsymbol{S=\int\limits_c^d \varphi(y)dy}$.



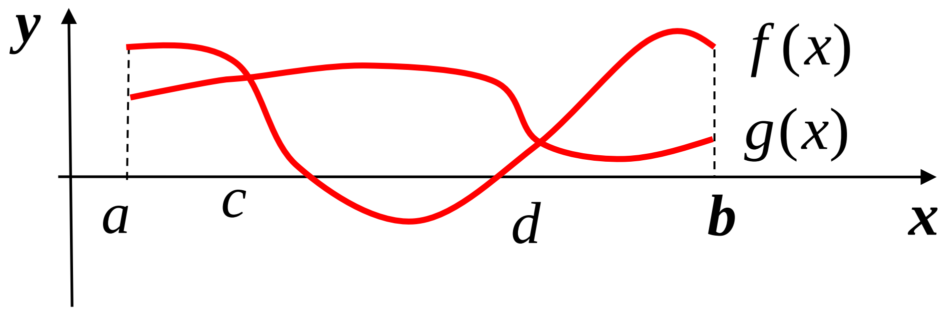
Пусть $\boldsymbol{x=\varphi(y)<0}$, $\boldsymbol{S=\left|\int\limits_c^d \varphi(y)dy\right|=-\int\limits_c^d \varphi(y)dy}$.



$$S=-\int_a^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx-\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx+\int_{c_3}^{b} f(x)dx\,.$$

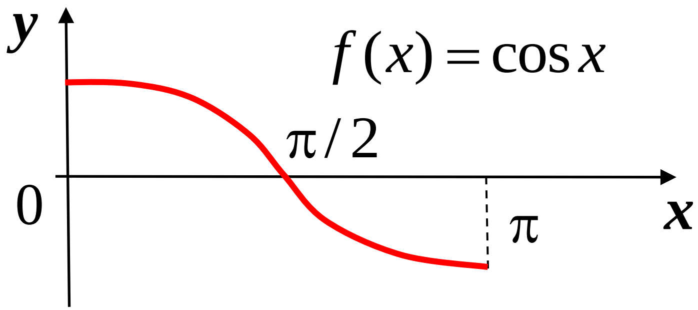


$$f(x)\geq g(x). \quad S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx\,.$$



$$S=\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^d (g(x)-f(x))dx+\int_d^b (f(x)-g(x))dx.$$

Пример 160. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $f(x) = \cos x$, осями абсцисс и ординат и линией $x = \pi$.



Решение. $$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \right| = \int_0^{\pi} |\cos x| dx .$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

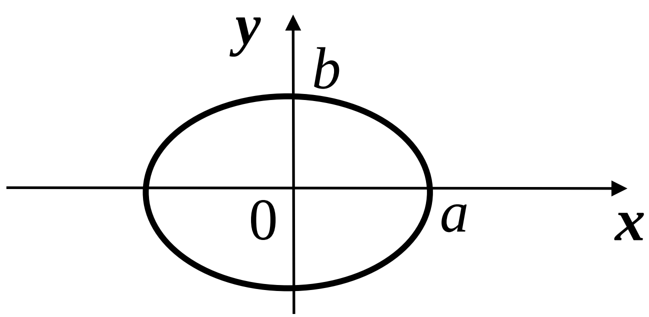
$$S_2 = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \right| = \left| \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| = \left| \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} \right| = |-1| = 1. \qquad S = 1 + 1 = 2.$$

Ответ. Площадь равна 2.

Вычисление площадей фигур при параметрическом задании линий

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2, \qquad dx = x'(t)dt, \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Пример 161. Вычислить площадь эллипса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$



Решение. В силу симметрии $\frac{1}{4}S = \int\limits_0^a y\,dx \qquad y = b\sin t \qquad dx = -a\sin t\,dt$

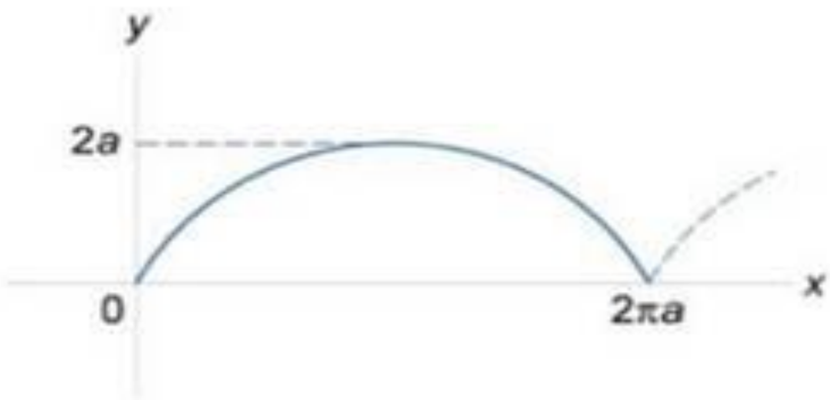
$$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad x_2 = a \Rightarrow t_2 = 0$$

$$S = 4\int\limits_0^a y\,dx = -2ab\int\limits_{\pi/2}^{0}(1-\cos 2t)\,dt = -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \pi ab.$$

Ответ. Площадь равна πab.

Пример 162. Вычислить площадь одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

$0 \le t \le 2\pi$



Решение.

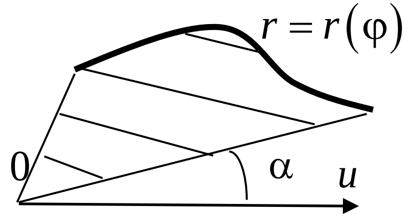
$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2\left(\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t\,dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt\right) = a^2\left(\left.(t - 2\sin t)\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt\right) =$$

$$= a^2\left(2\pi + \frac{1}{2}\left.\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_0^{2\pi}\right) = 3\pi a^2.$$

Площадь фигур в полярных координатах

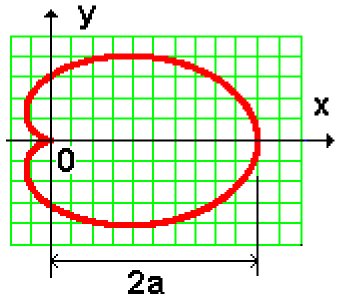
Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\boldsymbol{l}$, заданной в полярной системе координат $\{0, r, \varphi\}$ уравнением $r = r(\varphi)$ $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.



За базовую фигуру примем криволинейный сектор, ограниченный линией $r = r(\varphi)$ и радиус-векторами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. ***Правильная фигура***, если любой луч $\varphi = \varphi^*$ $\alpha \leq \varphi^* \leq \beta$ пересекает $\boldsymbol{l}$ в одной точке. Считаем, что $r = r(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$.

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi}.$$

Пример 163. Вычислить площадь кардиоиды $\boldsymbol{r = a(1+\cos\varphi)}$.

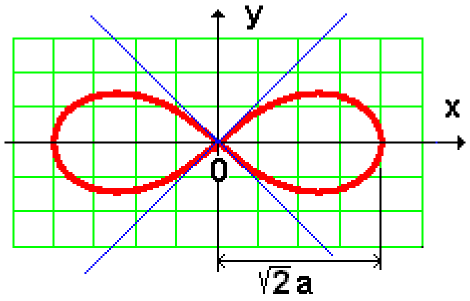


Решение. В силу симметрии

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Пример 164. Вычислить площадь лемнискаты Бернулли



$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

Решение. $x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi.$

$$(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)^2=a^2(r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi)\Rightarrow r^2=a^2\cos 2\varphi$$

$$r=a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

В силу симметрии

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=a^2.$$

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана
2455 - 2460, 2461,2462, 2473, 2507

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятие 31
2. Решить типовой расчет 3 задачи 12-13

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.