Семинар 27

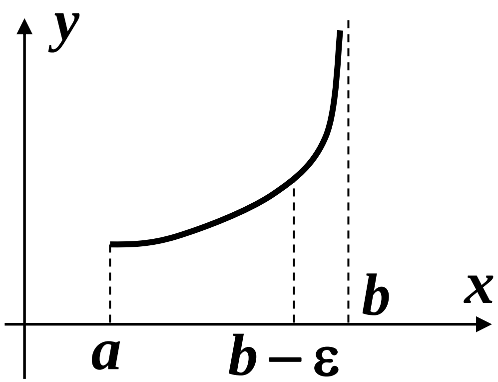
Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода)

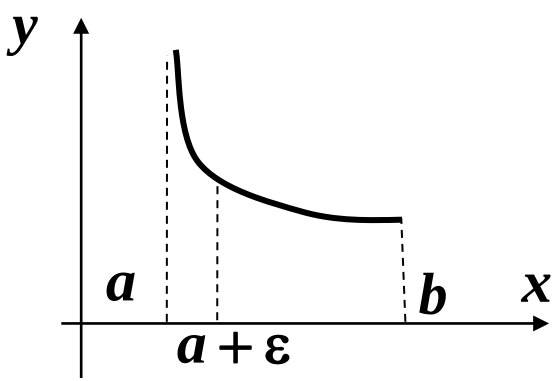
Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$ (b –точка разрыва). Считаем, что $f(x)$ интегрируема на $[a;b-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0:\ \exists \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, зависящий от переменного верхнего предела интегрирования.

Определение. Несобственным интегралом от $f(x)$, непрерывной на $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в $x=b$, или ***несобственным интегралом 2-го рода*** называется предел интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad \varepsilon>0.$$

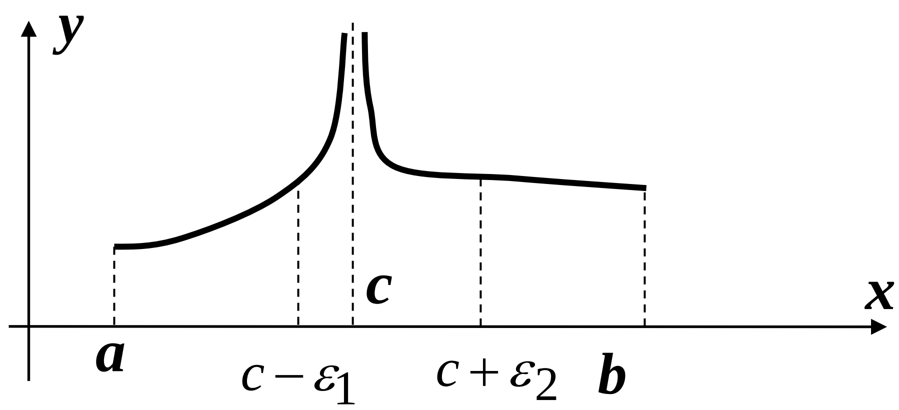
Аналогично
$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad \varepsilon>0.$$





Если разрыв функции 2-го рода во внутренней точке **[*a*;*b*]**, то из аддитивности интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx .$$



Если оба предела существуют и конечны, то соответствующий несобственный интеграл называются ***сходящимися***. В противном случае – ***расходящимися***.

Пример 155. Исследовать несобственный интеграл 2-го рода на сходимость

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty.$$

Ответ. Интеграл расходится.

Пример 156. Исследовать интеграл на сходимость $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ $\quad \alpha \in R \quad a<b$.

Решение. а) $\alpha \neq 1$ $\quad \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} (b-x)^{-\alpha} d(b-x) =$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} \left. \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_a^{b-\varepsilon} = -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\varepsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha < 1, \\ \infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

б) $\alpha = 1$ $\quad \int\limits_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ln|b-x| \Big|_a^{b-\varepsilon} =$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} (\ln|\varepsilon| - \ln|b-a|) = \infty .$$

Ответ. $\alpha < 1$ - сходится, $\alpha \geq 1$ - расходится.

Теорема (***признак сравнения***). Пусть в левой (правой) окрестности точки $\boldsymbol{b}$ (точки $\boldsymbol{a}$) определены функции $\mathbf{0} \le f(x) \le g(x)$. Тогда

$$\int_a^b g(x)dx \text{ - сходится} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ - сходится;}$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ - расходится} \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ - расходится.}$$

Теорема (*предельный признак сравнения*). Пусть $f(x), g(x) \geq 0$ на $[a;b)$;

b - точка разрыва $f(x)$ и $g(x)$.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to b-\varepsilon} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, то

$\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Аналогично для точки разрыва $c \in (a;b)$.

Пример 157. Исследовать несобственный интеграл 2-го рода на сходимость

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+2x^2+3x}$$

Решение. Применим признак сравнения.

Сравним подынтегральную функцию с функцией $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2x^2+3x}<\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x\in(0;1].$$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1=2$ - интеграл сходится.

Ответ. Исходный интеграл тоже сходится.

Пример 158. Исследовать несобственный интеграл 2-го рода на сходимость

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-3)(x-4)}.$$

Решение. Применим предельный признак сравнения.

Сравним подынтегральную функцию с функцией $g(x)=\dfrac{1}{3-x}$.

Интеграл $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{3-x}$ - расходится.

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{f(x)}{g(x)}=-\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x-4}=1>0.$$

Ответ. Исходный интеграл расходится.

Пример 159. Исследовать несобственный интеграл 2-го рода на сходимость

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. Применим предельный признак сравнения.

Сравним подынтегральную функцию с функцией $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}$

$\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Интеграл от нее сходится.

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} > 0.$$

Ответ. Исходный интеграл сходится.

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана
2394 - 2400, 2406, 2412, 2413, 2415

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятие 30
2. Решить типовой расчет 3 задачу 11

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.