Семинар 26

Несобственные интегралы первого рода

(Вычисление по определению и исследование на сходимость по признакам)

Несобственные интегралы

Понятие несобственного интеграла. При определении определенного интеграла как предела интегральной суммы предполагалось:

1) a и b - конечны.

2) Подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна или существует конечное число точек разрыва 1-го рода.

В этом случае определенные интегралы называются ***собственными***.

Если хотя бы одно из условий не выполнено, то интегралы называются ***несобственными*.** Тогда определение теряет смысл.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1-го рода)

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;\infty)$. Тогда она непрерывна на $[a;b]\subset[a;\infty)$. Тогда существует интеграл

$$I(b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Будем увеличивать $(b\to\infty)$. Возможны 2 случая.

1) $I(b)$ имеет предел;

2) $I(b)$ предела не имеет.

Определение. ***Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования*** (от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;\infty)$) называется предел $I(b)$ при $b \to +\infty$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если предел существует, то интеграл ***сходящийся***, если не существует, то – ***расходящийся***.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$ обозначается

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

и представляется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx \quad c \in (-\infty;\infty).$$

Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx.$

Если хотя бы один из пределов не существует, то интеграл расходится.

Это ***несобственные интегралы 1-го рода***.

Пример 151. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ $\alpha \in R$.

Решение. 1) $\alpha \neq 1$ $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b\to\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1\right)$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} & \forall \alpha > 1, \\ \infty & \forall \alpha < 1. \end{cases}$$

2) $\alpha = 1$ $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b - \ln 1 = \infty$.

Ответ. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ - сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 152. Вычислить интеграл или доказать его расходимость

Решение. $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{b}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}a)+\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Несобственный интеграл 1-го рода обладает рядом свойств собственных интегралов.

В частности, формула Ньютона-Лейбница имеет вид

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a), \text{ где } F(\infty) = \lim_{b\to\infty} F(b).$$

Применение формулы Ньютона–Лейбница позволяет сократить запись

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = -e^{-\infty} + 1 = 1.$$

Теорема. (***признак сравнения***). Если на $(-\infty;\infty)$ определены 2 функции $f(x) \geq 0$ и $\varphi(x) \geq 0$, интегрируемые на каждом $[a;b]$, причем

$0 \leq f(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \geq a$, то

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)dx \text{ - сходится} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ - сходится.}$$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ - расходится} \Rightarrow \int_a^{\infty} \varphi(x)dx \text{ - расходится.}$$

Теорема. (***предельный признак сравнения***). Если на $[a;b]$ определены $f(x)$ и $\varphi(x)$, интегрируемые на любом конечном $[a;b]$ и $\exists$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A>0,$$

то $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$ - либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Теорема. Если на $[a;\infty)$ $f(x)$ меняет знак и $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ - сходится, то сходится и $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$.

Пример 153. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ - исследовать на сходимость.

Решение. а) Используем признак сравнения. Сравним с интегралом $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ - сходится при $\alpha>1$.

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}<\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\quad \forall x\geq 1.$$

Следовательно, интеграл сходится.

б) Используем предельный признак сравнения

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+1}}=1>0 \qquad \varphi(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Пример 154. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$

Решение.

$\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}dx$ - сходится, т.к. $\forall x \quad \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \ \Rightarrow \int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$ - сходится абсолютно.

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана
2366 - 2373, 2378, 2386 - 2388.

Домашнее задание

1. Решить типовую задачу 10

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.