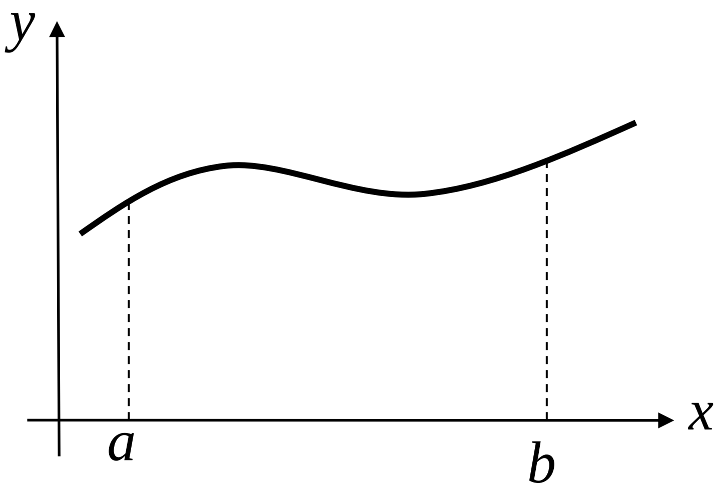
Семинар 25

Определенный интеграл. Геометрический и физический смысл определенного интеграла. Основные методы вычисления определенного интеграла

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $f(x) \geq 0$.



Фигура называется криволинейной трапецией.

Площадь криволинейной трапеции – определенный интеграл от $f(x) \geq 0$

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Физический смысл определенного интеграла

$$v(t), \qquad t_0 \le t \le T,$$

S – путь, пройденный материальной точкой за это время со скоростью v

$$S == \int_{t_0}^{T} v(t)dt.$$

Основные свойства определенного интеграла

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int\limits_a^b dx = b - a$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ $b < a \to \Delta x_k < 0$;

4) $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx \quad \forall c \in R$;

5) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int\limits_a^b f_n(x)dx$;

6) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \qquad c \in (a,b)$;

7) Если $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0, \ \ a < b$;

8) Если интегрируемые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$

$$f(x) \geq \varphi(x) \ \ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b \varphi(x)dx;$$

9) Если m и M – наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на $[a;b]$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad a < b;$$

10) Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\exists(\cdot)\xi \in [a;b]:$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

$$f(x) \text{ - непрерывна} \Rightarrow \exists\, \xi : m \le f(\xi) \le M \Rightarrow \qquad f(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Число $f(\xi)$ называется интегральным средним значением функции $f(x)$ на $[a;b]$.

Формула Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Значение определенного интеграла на отрезке $[a;b]$ от непрерывной функции $f(x)$ равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при $x = b$ и $x = a$.

Основные методы вычисления определенного интеграла

Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница

Пример 142. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$

Пример 143. $\int\limits_0^1 (6x^2+3)dx = (2x^3+3x)\Big|_0^1 = (2\cdot 1+3\cdot 1)-(2\cdot 0+3\cdot 0) = 5.$

Пример 144. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

Пример 145. $\int\limits_{1}^{6}\frac{dx}{\sqrt{3+x}}=\int\limits_{1}^{6}(3+x)^{-\frac{1}{2}}d(3+x)=2\sqrt{3+x}\Big|_{1}^{6}=2(3-2)=2$.

Пример 146. $\int\limits_{-1}^{0}e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{0}=-\frac{1}{2}(e^{0}-e^{2})=\frac{e^{2}-1}{2}$.

Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1,t_2]$, причем $\varphi[t_1,t_2]=[a;b]$ и $\varphi(t_1)=a$, $\varphi(t_2)=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

При вычислении определенного интеграла нет необходимости возвращаться к исходной переменной, т.к. вместе с заменой переменной изменяются и пределы интегрирования.

Пример 147. $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^2,\ a = 0,\ t_1 = \sqrt{a} = 0 \\ dx = 2tdt,\ b = 9,\ t_2 = \sqrt{9} = 3 \end{matrix} \right| =$

$$= \int_0^3 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(t - \ln|1+t|\right)\Big|_0^3 = 6 - 2\ln 4.$$

Пример 148. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t,\ a = \frac{\pi}{6},\ t_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos x dx = dt,\ b = \frac{\pi}{3},\ t_2 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right| =$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^{-3}dt = -\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}\ .$$

Пример 149. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x\,dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} =$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Пример 150. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x}, & v = \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = x\operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x\,dx =$

$$= x\operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0 = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана
2233, 2234, 2239, 2248, 2249, 2251, 2254.
2259, 2261, 2264, 2268, 2279, 2287.

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятия 28, 29

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.