Семинар 24

Интегрирование иррациональных функций

Интегралы вида $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$ $\quad$ ($m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ - целые числа).

Подстановка $x = t^s$ (s – наименьшее общее кратное $n_1, n_2, \ldots$).

Пример 130. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} n_1 = 2, \ x = t^6 \\ n_2 = 3 \\ s = 6, \quad dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3 6t^5}{t^3 - t^2} dt =$

$$= 6\int \frac{t^6}{t-1} dt = t^6 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6\ln|t-1| + C =$$

$$= x + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C.$$

Интегралы вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$

($m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ - целые числа).

Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$ (s – наименьшее общее кратное $n_1, n_2, \ldots$).

Пример 131. $\int\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\left|\begin{array}{ll}\frac{1-x}{1+x}=t^2; & x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}; & 1-x=\frac{2t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=$

$$=-\int\frac{(1+t^2)^2}{4t^4}\cdot t\cdot\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt=-\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}+C=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

Интегралы вида $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; $I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

$$I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

I_1 - ***выделение полного квадрата***.

Пример 132. $\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C.$$

I_2 - ***выделяется дифференциал в числителе.***

Пример 133. $$\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int (x^2+2x+2)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+2x+2) - 4\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$$

$$= 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C.$$

I_3 ***сводится к*** I_1 ***подстановкой*** $x=\dfrac{1}{u}$ $dx=-\dfrac{1}{u^2}du$.

Пример 134. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{u} \\ dx=-\dfrac{1}{u^2}du \end{array}\right|=-\int\frac{u\,du}{u^2\sqrt{\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{2}{u}-1}}=$$

$$=-\int\frac{du}{\sqrt{1+2u-u^2}}=-\int\frac{du}{\sqrt{2-(u-1)^2}}=\arccos\frac{u-1}{\sqrt{2}}+C=\arccos\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\sqrt{2}}+C.$$

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Частные случаи рассмотрены раньше.

Тригонометрические подстановки

Приводятся к виду (выделением полного квадрата)

$$I_1 = \int R\left(u, \sqrt{k^2 - u^2}\right)du;$$

$$I_2 = \int R\left(u, \sqrt{k^2 + u^2}\right)du;$$

$$I_3 = \int R\left(u, \sqrt{u^2 - k^2}\right)du.$$

$I_1 \quad u = k\sin t \quad (u = k\cos t)$ $\qquad I_1 = \int R(k\sin t, k\cos t)k\cos t\,dt$

$I_2 \quad u = k\,\mathrm{tg}\,t \quad (u = k\,\mathrm{ctg}\,t). \quad k > 0$ $\qquad I_2 = \int R(k\,\mathrm{tg}\,t, k\sec t)k\sec^2 t\,dt$

$I_3 \quad u = k\sec t \quad (u = k\,\mathrm{cosec}\,t)$ $\qquad \sqrt{u^2 - k^2} = k\,\mathrm{tg}\,t$

$$du = k\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$I_3 = \int R(k\sec t, k\,\mathrm{tg}\,t)k\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

Пример 135. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t,\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t \\ dx = a\cos t\,dt \end{array} \right| =$

$$= a^2 \int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \arcsin \dfrac{x}{a},\ \cos t = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \\ \sin t = \dfrac{x}{a} \end{array} \right| = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 136. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \left| \begin{matrix} x = a\,\mathrm{tg}\,t \\ dx = a\sec^2 t dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{a^2(1+tg^2 t)} \cdot a\sec^2 t dt =$

$$= a^2 \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \ldots.$$

далее с помощью универсальной тригонометрической подстановки $z = \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$.

Но это не рационально.

Удобнее интегрировать по частям.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\sqrt{x^2+a^2}, & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ dv=dx, & v=x \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(a^2+x^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + \int \frac{a^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Перенося $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ в левую часть, получим

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

Аналогично можно вычислять $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

Пример 137. $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{a^2+x^2}} = \left| \begin{matrix} x = a\,\mathrm{tg}\,t, & \sqrt{a^2+x^2} = a\sec t \\ dx = a\sec^2 t\,dt, & \sin t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{a\sec^2 t\,dt}{a^4\,\mathrm{tg}^4\,t \cdot a\sec t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^4 t} =$$

$$= \frac{1}{a^4}\int (\sin t)^{-4} d(\sin t) - \frac{1}{a^4}\int (\sin t)^{-2} d(\sin t) =$$

$$= -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4 \sin t} + C = -\frac{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^4x^3} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4 x} + C.$$

Интегралы вида $\int x^m (a+bx^n)^p dx \quad (m,n,p \in Q;\ a,b \in R)$.

Это ***дифференциальный бином***. Применяются подстановки:

1) $p \in Z \Rightarrow x = t^s$ (s - наименьшее общее кратное знаменателей m и n).

2) $\dfrac{m+1}{n}$ - целое $\Rightarrow a + bx^n = t^s$ (s – знаменатель p).

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ - целое $\Rightarrow ax^{-n} + b = t^s$ (s – знаменатель p).

Во всех остальных случаях эти интегралы не выражаются через элементарные функции.

Пример 138. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-10} dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} p=-10-\text{целое} \\ x=t^4,\ dx=4t^3dt \end{array} \right| = \int \frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}} = 4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt =$$

$$= 4\int \frac{dt}{(t+1)^9} - 4\int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = -\frac{4}{8(t+1)^8} + \frac{4}{9(t+1)^9} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8} + \frac{4}{9}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9} + C.$$

Пример 139. $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\int x^3(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=$

$$=\left|\begin{matrix} m=3,\ n=2,\ \dfrac{m+1}{n}=2,\ x^2=a^2-t^2 \\ p=-\dfrac{3}{2},\ a^2-x^2=t^2,\ 2xdx=-2tdt \end{matrix}\right|=-\int\frac{(a^2-t^2)tdt}{t^3}=$$

$$=-a^2\int\frac{dt}{t^2}+\int dt=\frac{a^2}{t}+t+C=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 140. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx =$

$$= \left| \begin{matrix} p=-\frac{1}{2}, \quad m=-4, \quad n=2, \quad \frac{m+1}{n}+p=\frac{-4+1}{2}-\frac{1}{2}=-2, \\ 1+x^{-2}=t^2, \quad -2x^{-3}dx=2tdt, \quad x^{-3}dx=-tdt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int x^{-4}\left[x^2\left(1+x^{-2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{-5}\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx = -\int\left(t^2-1\right)\frac{1}{t}tdt =$$

$$= -\int\left(t^2-1\right)dt = -\frac{t^3}{3}+t+C = \sqrt{x^{-2}+1}-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^{-2}\right)^3}+C =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3x^3}+C.$$

Пример 141. $\int x^{\frac{1}{7}}(2x+3)^{\frac{1}{3}}dx = \left| \begin{matrix} p=\frac{1}{3}, \quad m=\frac{1}{7}, \quad n=1, \\ \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{7}+1+\frac{1}{3}=\frac{31}{21} \end{matrix} \right|.$

Интеграл не выражается через элементарные функции.

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана
1896, 2068, 2152, 2160.

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана 27
2. Решить задачи типового расчета 3 задания 6, 7

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.