Семинар 23

Интегрирование тригонометрических функций

Рациональные функции

Выражение $R(u,v,w,...)$ - называется ***рациональной функцией*** относительно $u,v,w,...$, которое получено из любых величин $u,v,w,...$, а также действительных чисел с помощью четырех арифметических действий.

Пример 115. $R(u,v)=\dfrac{\sqrt{2}u^2-3v}{5u^2-6uv+v^2}$.

Пример 116. $R\left(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x^2}\right)=\dfrac{\sqrt{5}\sqrt[3]{x^2}}{x-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.

Пример 117. $R(\sin x,\cos x)=\dfrac{\sin x-2\cos^2 x}{3\sin^2 x+\cos x+1}$.

Пример 118. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2}$ не является рациональной функцией относительно x, но рациональная функция относительно $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$.

Пример 119. $\dfrac{\sqrt{\sin x}+2\cos^2 x}{\sin^2 x+3\cos x+5}$ не является рациональной функцией относительно $\sin x$.

I. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ при условии, что он не является табличным. Иногда достаточно преобразовать подынтегральное выражение.

Пример 120. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \mathrm{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x}dx +$

$$+\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \mathrm{tg}^2 x d(\mathrm{tg}\, x) + \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\, x + C.$$

Пример 121. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

Пример 122. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$.

В интегральном исчислении нет общих правил. Интегрирование может быть выполнено не единственным образом. Даже теоретическое правило вычисления может быть не очень удачным.

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Тогда подынтегральное выражение преобразуется в рациональную функцию от t.

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Удобно вычислять интегралы вида $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$.

Пример 123. $\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} = \left| t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)} =$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+2t+17} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+16} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{4} + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким вычислениям.

Частные подстановки

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$- нечетная относительно $\sin x$.

Подстановка $\cos x = t$.

Пример 124. $\displaystyle\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t,\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1 \\ \sin^2 x = 1 - t^2, \quad dt = -\sin x dx \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1} = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t^2-4}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{2t^2-1} = \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left| \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1} \right| + C.$$

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$- нечетная относительно $\cos x$.

Подстановка $\sin x = t$.

Пример 125. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{\cos^2 x(1 + \cos^2 x)\cos x dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)dt}{t^2 + t^4} =$$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1 + t^2}\right) dt = t - \frac{2}{t} - 6\,\mathrm{arctg}\, t + C = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\,\mathrm{arctg}(\sin x) + C.$$

3) $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ - четная одновременно относительно $\sin x$ и $\cos x$. Подстановка $\mathrm{tg}\, x = t$.

II. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

n – нечетное $\Rightarrow \sin x = t$, m – нечетное $\Rightarrow \cos x = t$.

Пример 126. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \left| \sin x = t \quad \cos x dx = dt \right| =$

$$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C =$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

Если ($m+n$) – четное положительное число, тогда

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Пример 127. $$\int\sin^2 x\cos^2 x dx=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx=\frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

III. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$; $\int \cos mx \cos nx dx$; $\int \sin mx \sin nx dx$

Понижение степени:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Пример 128.

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

IV. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x dx$; $\int \operatorname{ctg}^m x dx \quad m \in N; \; m > 1$.

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \left(\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1\right).$$

Пример 129.

$$\int \operatorname{tg}^7 x\, dx = \int \operatorname{tg}^5 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \operatorname{tg}^5 x\, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана
1817, 1823, 1829, 2090, 2092, 2111.

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятие 25, 26
2. Решить задачи типового расчета 3 задания 8, 9

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.