Семинар 22

Интегрирование рациональных дробей.

Рациональные дроби

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

$n \geq m$ - неправильная дробь,

$n < m$ - правильная дробь.

Пример 103. $\dfrac{2x^5}{2x^2 + 3x + 2}$ - неправильная дробь.

Пример 104. $\dfrac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 - 1}$ - правильная дробь.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы

$$\frac{R_k(x)}{Q_m(x)} = R_l(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Для этого нужно числитель разделить на знаменатель столбиком.

Пример 105. Представить в виде суммы многочлена и правильной дроби неправильную дробь $\dfrac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2}$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + 1 & x^2 + x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + x^3 + 2x^2} & x^2 - 2x \\
\quad -2x^3 - 2x^2 + 1 & \\
\quad \underline{-2x^3 - 2x^2 - 4x} & \\
\qquad\qquad\qquad 4x + 1 &
\end{array}$$

Ответ. $$x^2-2x+\frac{4x+1}{x^2+x+2}.$$

Интегрирование многочленов не представляет затруднений. Рассмотрим интегрирование правильных дробей.

Интегрирование простейших рациональных дробей

Простейшие правильные дроби:

1) $\dfrac{A}{x-a}$ 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n \geq 2)$

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n \geq 2)$

A, a, p, q, M, N - действительные числа.

Трехчлен в знаменателе действительных корней не имеет $\left(\dfrac{p^2}{4}-q<0\right)$.

1) $$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C.$$

2) $$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$$

3) $$\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{array}{l} d(x^2+px+q) = (2x+p)dx \\ Mx+N = \dfrac{M}{2}(2x+p)+N-\dfrac{Mp}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{\left(N-\dfrac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Пример 106. Найти первообразную от правильной рациональной дроби

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+3}.$$

Решение. Это простейшая рациональная дробь 3 типа.

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+3} = \left|(x^2+2x+3)' = 2x+2\right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+1}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} + \int \frac{dx}{x^2+2x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Ответ. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$

4) $$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n} = \left| \begin{array}{l} x+\dfrac{p}{2}=t \quad dx=dt \quad a^2=q-\dfrac{p^2}{4} \\ x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}=t^2+a^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{M\left(x+\dfrac{p}{2}\right)+N-\dfrac{Mp}{2}}{\left(\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}\right)^n}dx = M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = M\cdot I_0+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot I_n.$$

$$I_0=\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2)=\frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+C.$$

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} \right) = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} \right).$$

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} = \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = \dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^n} & v = \dfrac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{t}{2(1-n)(t^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{t}{2(1-n)(t^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}.$$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\right)$$ - рекуррентная формула.

Зная $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$, получим I_2 и т.д.

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+a^2} + \frac{t}{2(t^2+a^2)}\right) =$$

$$= \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде конечной суммы простейших дробей 1-4 типов. Для этого необходимо разложить знаменатель на линейные и квадратичные множители, для чего необходимо решить уравнение

$$Q_m(x) = 0 \Leftrightarrow b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0 = 0.$$

Уравнение имеет ***m*** корней с учетом их кратности.

Теорема. Правильная рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где

$$Q_m(x) = (x-\alpha)^k \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q)^s \cdot \ldots,$$

можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)} + \ldots + \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s} + \ldots,$$

где $A_1, \ldots A_k, \ldots M_1, N_1, \ldots M_s, N_s, \ldots$ - действительные числа.

Пример 107. Разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей $\dfrac{x^2}{(x^3-8)(x^2+1)}$.

Решение.

$$\frac{x^2}{(x^3-8)(x^2+1)}=\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Ответ. $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+4}+\dfrac{Dx+E}{x^2+1}$.

Пример 108. Разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-1)^3}$.

Решение. $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-1)^3}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$.

Ответ. $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$.

Пример 109. Разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей $\dfrac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)^2x^3}$.

Решение. $\dfrac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)^2x^3}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+4)^2}+\dfrac{G}{x}+\dfrac{M}{x^2}+\dfrac{N}{x^3}$

Ответ. $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+4)^2}+\dfrac{G}{x}+\dfrac{M}{x^2}+\dfrac{N}{x^3}$.

Нужно определить коэффициенты.

Метод неопределенных коэффициентов

Приведем простейшие дроби к общему знаменателю и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. Имеем систему $\boldsymbol{m}$ линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов.

Пример 110. Разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей $\dfrac{x^2}{x^3-8}$.

Решение. $\dfrac{x^2}{x^3-8}=\dfrac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+4}=$

$$=\frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 1=A+B \\ x^1 & 0=2A+C-2B \\ x^0 & 0=4A-2C \end{array}\right\} A=\frac{1}{3}\quad B=\frac{2}{3}\quad C=\frac{2}{3}$$

Ответ. $\dfrac{x^2}{x^3-8}=\dfrac{1}{3(x-2)}+\dfrac{2(x+1)}{3(x^2+2x+4)}$.

Пример 111. Разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей $\dfrac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}$.

Решение.

$$\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-3^2=\\=(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)=(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)\end{array}\right|=$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}=$$

$$=\frac{A(x+3)(x^2+2x+3)+B(x-1)(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}.$$

$$7x^2+26x-9=(A+B+C)x^3+(5A+B+2C+D)x^2+$$

$$+(9A+B-3C+2D)x+9A-3B-3D$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3 & 0=A+B+C \\ x^2 & 7=5A+B+2C+D \\ x^1 & 26=9A+B-3C+2D \\ x^0 & -9=9A-3B-3D \end{array}\right\} \Rightarrow A=1;\ \ B=1;\ \ C=-2;\ \ D=5.$$

Ответ. $$\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}+\frac{5-2x}{x^2+2x+3}.$$

Метод частных значений

Задаем $\boldsymbol{x}$ определенное значение и приравниваем левую и правую часть. Особенно удобно это делать, когда корни действительные.

Пример 112. Разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$.

Решение. $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\dfrac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-2}=$

$$=\left|\begin{array}{l} 4x^2+16x-8=A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2) \\ \begin{array}{l|l} x=0 & -8=-4A \\ x=-2 & -24=8B \\ x=2 & 40=8C \end{array}\left.\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=-3 \\ C=5 \end{array} \end{array}\right|=\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}.$$

Ответ. $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{5}{x-2}$.

Замечание. Иногда удобно применять комбинацию методов.

Правило интегрирования рациональных дробей

1) Для неправильной дроби выделить целую часть

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m.$$

2) Представить $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в виде суммы простейших дробей.

3) Интеграл от рациональной дроби представить в виде интеграла от многочлена и от простейших дробей. Вычислить его.

Пример 113. Найти первообразную $I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Решение. $$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$$

$$+\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}\right)dx=\begin{vmatrix}A=2 & B=-3\\ C=5 & \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x+2}+5\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|-3\ln|x+2|+5\ln|x-2|+\ln C=$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{Cx^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|.$$

Ответ. $$I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{Cx^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|.$$

Пример 114. $\int \frac{x^2dx}{x^3-8} = \int \frac{x^2dx}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}\right)dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} A = \frac{1}{3} \\ B = C = \frac{2}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\int \frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4} = \frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln(x^2+2x+4) + \ln C =$$

$$= \ln\left|\left(C(x-2)(x^2+2x+4)\right)^{\frac{1}{3}}\right| = \ln\left|\sqrt[3]{C(x^3-8)}\right|.$$

Замечание. Можно решить проще.

$$\int \frac{x^2dx}{x^3-8} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3-8)}{x^3-8} = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-8\right| + \frac{1}{3}\ln C = \ln\left|\sqrt[3]{C(x^3-8)}\right|.$$

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана

2012-2021, 2022-2035, 2036-2037.

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятие 24
2. Решить задачи типового расчета 3 задания 4, 5

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.