

Семинар 21

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Рассмотрим неопределенные интегралы вида

$$\begin{aligned} 1. & \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; & 2. & \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}; \\ 3. & \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx; & 4. & \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx. \end{aligned}$$

где: a, b, c, M, N - действительные числа.

Трехчлен $ax^2 + bx + c$ действительных корней не имеет
 $(b^2 - 4ac < 0)$.

Выделение полного квадрата

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Пример 100. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \left| x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 1 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right| =$$

$$\int \frac{dx}{\left(x - 1/2 \right)^2 + 3/4} = \left| u = x - 1/2 \right| = \int \frac{du}{u^2 + 3/4} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2(x - 1/2)}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 101. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-1-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(1+2x+x^2)}} = \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(1+x)^2}} = \left| u = x+1 \right| = \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \\ &= \arcsin \frac{u}{2} + C = \arcsin \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Примеры использования схемы внесения функции под знак дифференциала

$$\int \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} du = |\varphi'(u) du = d(\varphi(u))| = \int \frac{d(\varphi(u))}{\varphi(u)} = \ln |\varphi(u)| + C,$$

$$\int \frac{\varphi'(u)}{\sqrt{\varphi(u)}} du = |\varphi'(u) du = d(\varphi(u))| = \int \frac{d(\varphi(u))}{\sqrt{\varphi(u)}} = 2\sqrt{\varphi(u)} + C.$$

Пример 102. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx &= \left| \left(x^2 + 6x + 13 \right)' = 2x + 6 \right| = \\ &= \int \frac{2x+6-5-6}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx = \int \frac{2x+6-11}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx = \\ &= \int \frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx - 11 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \sqrt{x^2 + 6x + 13} - 11 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2 + 4}} = \\
&= |u = x + 3| = 2 \cdot \sqrt{x^2 + 6x + 13} - 11 \cdot \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}} = \\
&= 2 \cdot \sqrt{x^2 + 6x + 13} - 11 \cdot \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 4} \right| + C = \\
&= 2 \cdot \sqrt{x^2 + 6x + 13} - 11 \cdot \ln \left| x + 3 + \sqrt{(x+3)^2 + 4} \right| + C.
\end{aligned}$$

Ответ.

$$\int \frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} dx =$$
$$= 2 \cdot \sqrt{x^2 + 6x + 13} - 11 \cdot \ln \left| x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 13} \right| + C.$$

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана 2013, 2019

Домашнее задание

Решить задачу типового расчета 3 задание 3

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.