Семинар 20

Интегрирование по частям

Неопределенный интеграл.
Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Применяется для нахождения интегралов вида:

$$1.\int P_n(x)e^{kx}dx, \qquad \int P_n(x)\sin kxdx,$$

$$\int P_n(x)\cos kxdx,$$

Здесь $P_n(x)$ - многочлен ***n***-степени.

Приняв за $u = P_n(x),$ применяем *n* раз метод интегрирования по частям.

2. $\int P_n(x)\ln x dx,\ \int P_n(x)\arcsin x dx,\ \int P_n(x)\arccos x dx,$

$\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\, x dx,\ \int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\, x dx.$

Здесь принимаем u=ln$x$, u=arcsin$x$, u=arccos$x$,

u=arctg$x$, u=arcctg$x$.

3. $\int e^{ax}\cos bx dx,\ \int e^{ax}\sin bx dx$ $(a, b$ – постоянные).

Они вычисляются интегрированием по частям два раза.

Пример 96. Найти неопределенный интеграл

$$\int (x^2 + 3x)e^{4x}dx.$$

Решение. 1. Интеграл первого вида.
Имеется многочлен второй степени.
За ***u*** принимаем многочлен и два раза интегрируем по частям.

$$\int (x^2+3x)e^{4x}dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+3x, \quad du = (2x+3)dx, \\ dv = e^{4x}dx, \quad v = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2+3x)e^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x}(2x+3)dx =$$

2. Интегрируем по частям второй раз

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2x+3, & du = 2dx, \\ dv = e^{4x}dx, & v = \int e^{4x}dx = \dfrac{1}{4}e^{4x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2+3x)e^{4x} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(2x+3)e^{4x} - \frac{1}{2}\int e^{4x}dx \right) =$$

$$=\frac{1}{4}(x^2+3x)e^{4x}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(2x+3)e^{4x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}e^{4x}\right)+C=$$

$$=\frac{e^{4x}}{16}(4x^2+10x-1)+C.$$

Пример 97. Найти неопределенный интеграл

$$\int x \arcsin x dx.$$

Решение. 1. Интеграл второго вида.

За ***u*** принимаем arcsin*x* и интегрируем по частям

$$\int x\arcsin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x, \;\; du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = x\,dx, \quad v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. Преобразуем интеграл в правой части

$$\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^2}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{-1+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}dx$$

3. Получили два табличных интеграла. Окончательно

$$\int x\arcsin x dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\arcsin x +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)+C=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 98. Найти неопределенный интеграл

$$\int \ln^2 x dx.$$

Решение. 1. Интеграл второго вида.
За $\boldsymbol{u}$ принимаем $\ln^2 x$ и интегрируем по частям (избавляемся от степени логарифма)

$$\int \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \;\; du = 2 \cdot \ln x \cdot \dfrac{1}{x} dx = \dfrac{2 \ln x}{x} dx, \\ dv = dx, \qquad v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \ln^2 x - \int x \frac{2 \ln x}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx =$$

2. На втором этапе, интегрируя второй раз по частям, избавляемся от самого логарифма

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln x,\ \ du=\dfrac{dx}{x}, \\ dv=dx,\ \ v=x \end{matrix}\right|=x\ln^2 x-2\left(x\ln x-\int\frac{xdx}{x}\right)=$$

$$=x\ln^2 x-2(x\ln x-x)+C=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C.$$

Пример 99. Найти неопределенный интеграл

$$\int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx.$$

Решение. 1. Интеграл третьего вида. Интегрируем по частям два раза.
За ***u*** оба раза принимаем либо экспоненту, либо тригонометрическую функцию (в данном случае – экспоненту).

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=e^{-x}, & du=-e^{-x}dx, \\ dv=\cos\dfrac{x}{2}dx, & v=2\sin\dfrac{x}{2} \end{matrix}\right|=$$

$$=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}dx=$$

$$
=\begin{vmatrix} u=e^{-x}, \quad du=-e^{-x}dx \\ dv=\sin\frac{x}{2}dx, \quad v=-2\cos\frac{x}{2} \end{vmatrix}=
$$

$$
=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}-4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx.
$$

В результате получили

$$
\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}-4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx.
$$

2. Переносим интеграл из правой части в левую часть

$$5\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = 2e^{-x}\sin\frac{x}{2} - 4e^{-x}\cos\frac{x}{2} + C.$$

3. Окончательно получаем

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{2}{5}e^{-x}\left(\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\right) + C.$$

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана 1832, 1836, 1838, 1841, 1852

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятия 22, 23
2. Решить задачу типового расчета 3 задание 2

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.