Семинар 19

Метод внесения функции под знак дифференциала.

Метод замены переменной

Внесение функции под знак дифференциала

Прием интегрирования - внесение функции под знак дифференциала основан на свойстве дифференциала

$$d\varphi(x)=\varphi'(x)dx.$$

Следовательно, для внесения функции $\varphi'(x)$ под знак дифференциала $\varphi'(x)dx=d\varphi(x)$, можно воспользоваться таблицей дифференциалов, например

$$d(\cos u)=-\sin u\,du \;\Rightarrow\; \sin u\,du=-d(\cos u),$$

$$du^{\alpha}=\alpha u^{\alpha-1}du \Rightarrow u^{\alpha-1}du=\frac{1}{\alpha}d(u^{\alpha})$$

Используя пятое свойство неопределенного интеграла, можно вносить постоянный множитель под знак дифференциала и добавлять константу по формуле

$$f(au+b)du=\frac{1}{a}f(au+b)d(au+b).$$

Схема внесения функции под знак дифференциала

1. При необходимости согласуем аргумент подынтегральной функции с выражением под знаком дифференциала по формуле

$$f(au+b)du=\frac{1}{a}f(au+b)d(au+b).$$

2. Вносим функцию под знак дифференциала, используя соответствующую строку таблицы дифференциалов

$$f'(u)du=df(u).$$

3. Находим преобразованный неопределенный интеграл в таблице.

4. Пункты 1. и 2. могут применяться в произвольном порядке и (в некоторых случаях) не один раз.

Примеры использования схемы внесения функции под знак дифференциала

$$\int \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} du = \left| \varphi'(u)du = d(\varphi(u)) \right| = \int \frac{d(\varphi(u))}{\varphi(u)} = \ln|\varphi(u)| + C,$$

$$\int \frac{\varphi'(u)}{\sqrt{\varphi(u)}} du = \left| \varphi'(u)du = d(\varphi(u)) \right| = \int \frac{d(\varphi(u))}{\sqrt{\varphi(u)}} = 2\sqrt{\varphi(u)} + C.$$

Пример 92. Найти неопределенный интеграл

$$\int \sqrt{1+x^2}\,x\,dx.$$

Решение. 1. Вносим x под знак дифференциала, используя п.2.схемы:

$$dx^2 = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}d(x^2).$$

Интеграл примет вид

$$\int \sqrt{1+x^2}\,xdx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\,dx^2.$$

2. Согласуем выражение под корнем и под знаком дифференциала, используя п.1.схемы:

$$\sqrt{1+x^2}\,dx^2 = \sqrt{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right).$$

Интеграл примет вид

$$\int \sqrt{1+x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right).$$

3. Находим интеграл от степенной функции

$$\int \sqrt{1+x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{1/2} d\left(1+x^2\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3} + C.$$

Пример 93. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+5\cos x}}.$$

Решение. 1. Вносим $\sin x$ под знак дифференциала, используя п.2.схемы:

$$d(\cos x) = -\sin x dx \;\Rightarrow\; \sin x dx = -d(\cos x).$$

Интеграл примет вид

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+5\cos x}} = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{1+5\cos x}}.$$

2. Согласуем выражение под корнем и под знаком дифференциала, используя п.1.схемы:

$$\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{1+5\cos x}} = \frac{1}{5}\int \frac{d(1+5\cos x)}{\sqrt{1+5\cos x}}.$$

Интеграл примет вид

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+5\cos x}} = -\int \frac{d\left(\cos x\right)}{\sqrt{1+5\cos x}} = -\frac{1}{5}\int \frac{d\left(1+5\cos x\right)}{\sqrt{1+5\cos x}}.$$

3. Находим интеграл от степенной функции

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+5\cos x}} = -\frac{1}{5}\int \frac{d\left(1+5\cos x\right)}{\sqrt{1+5\cos x}} =$$

$$= -\frac{1}{5}\int \left(1+5\cos x\right)^{-1/2} d\left(1+5\cos x\right) =$$

$$= -\frac{2}{5}\sqrt{1+5\cos x} + C.$$

Пример 94. Найти неопределенный интеграл

$$\int \sin(e^{x^3}) e^{x^3} x^2 dx.$$

Решение. 1. Вносим x^2 под знак дифференциала, используя п.2.схемы:

$$dx^3 = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3).$$

Интеграл примет вид

$$\int \sin\left(e^{x^3}\right) e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int \sin\left(e^{x^3}\right) e^{x^3} dx^3.$$

2. Вносим e^{x^3} под знак дифференциала, используя снова п.2.схемы:

$$de^u = e^u du \Rightarrow e^u du = d(e^u).$$

Интеграл примет вид

$$\int \sin\left(e^{x^3}\right) e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3}\int \sin\left(e^{x^3}\right) e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3}\int \sin\left(e^{x^3}\right) de^{x^3}.$$

3. Находим интеграл от синуса

$$\int \sin\left(e^{x^3}\right) e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3}\int \sin\left(e^{x^3}\right) de^{x^3} = -\frac{1}{3}\cos\left(e^{x^3}\right) + C.$$

Метод замены переменной

$$x = \varphi(t) \quad dx = \varphi'(t)dt.$$

Тогда

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Пример 95. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x},\;\; x = t^3, \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{\sin t}{t^2} 3t^2 dt =$$

$$= 3\int \sin t\,dt = -3\cos t + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C.$$

Вообще

$$\int f(ax+b)\,dx = \left| \begin{matrix} ax+b=t,\ \ a\,dx=dt \\ dx=\dfrac{1}{a}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt.$$

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана
1703-1722, 1761-1780.

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятие 21
2. Решить задачу типового расчета 3 задание 1

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.