Семинар 18

Модуль 3
Интегральное исчисление функции одной переменной

Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование

Первообразная функции и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ $(x \in X \subset R)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема $\forall x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Операция отыскания $F(x)$ называется ***интегрированием***. Интегрирование – операция обратная дифференцированию.

Совокупность $F(x)+C$ (C – постоянная) всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1) $\left(\int f(u)du\right)' = f(u);$

2) $\int dF(u) = F(u) + C;$

3) $\int af(u)du = a\int f(u)du;$

4) $\int (f_1(u) \pm \ldots \pm f_n(u))du = \int f_1(u)du \pm \ldots \pm \int f_n(u)du;$

5) $\int f(au+b)du = \frac{1}{a}\int f(au+b)d(au+b) = \frac{1}{a}F(au+b)+C;$

6) Инвариантность формул интегрирования

Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной.

$$\boldsymbol{\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(u)du = F(u)+C}$$

где $\boldsymbol{u}$ -дифференцируемая функция ($\boldsymbol{u = u(x)}$).

Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1);$

2) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3) $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C, \quad (a \neq 1);$

4) $\int e^{u} du = e^{u} + C;$

5) $\int \sin u du = -\cos u + C;$

6) $\int \cos u du = \sin u + C$;

7) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$

8) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;

9) $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$;

10) $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$;

11) $$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$$

12) $$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$$

13) $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$$

14) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$$

15) $\int \mathrm{sh}\, u\, du = \mathrm{ch}\, u + C;$

16) $\int \mathrm{ch}\, u\, du = \mathrm{sh}\, u + C;$

17) $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C;$

18) $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C.$

Непосредственное интегрирование

Используя алгебраические преобразования и свойства неопределенного интеграла преобразуем подынтегральную функцию к табличному виду.

Пример 90. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2xe^{x} + 5x - 1}{x}\, dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{x}-2xe^{x}+5x-1}{x}dx=\int\left(x^{-1/2}-2e^{x}+5-\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\int x^{-1/2}dx-2\int e^{x}dx+5\int dx-\int\frac{dx}{x}=$$

$$=2\sqrt{x}-2e^{x}+5x-\ln|x|+C.$$

Пример 91. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx=\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{\left(4+x^2\right)\left(4-x^2\right)}}dx=$$

$$=\int\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{\left(4+x^2\right)\left(4-x^2\right)}}+\frac{2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{\left(4+x^2\right)\left(4-x^2\right)}}\right)dx=$$

$$= \int \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{\left(4+x^2\right)\left(4-x^2\right)}}\,dx + 2\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{\left(4+x^2\right)\left(4-x^2\right)}}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + 2\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right| + C.$$

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана 1676-1693,1695, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700,1701.