Семинар 17

Формула Тейлора

Формула Тейлора

Формула Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n.$$

Эта формула справедлива для любой функции, имеющей непрерывные производные до порядка n включительно.

Слагаемые, кроме последнего, образуют ***многочлен Тейлора*** порядка n, а последнее слагаемое имеет порядок малости выше n при x, стремящемся к x_0.

Это слагаемое характеризует погрешность ***приближенного*** равенства

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Его смысл – приближение любой функции $f(x)$ многочленом для значений x, близких к x_0.

Слагаемое $o(x-x_0)^n$ называется ***остаточным членом*** в формуле Тейлора в форме Пеано.

Пример 84. Написать формулу Тейлора второго порядка для функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

в окрестности точки $x_0 = 8.$

Решение. Производные

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

При $x = x_0 = 8$ получим

$$f(x_0) = 2, \quad f'(x_0) = \frac{1}{12}, \quad f''(x_0) = -\frac{1}{144}.$$

Ответ.

$$\sqrt[3]{x} = 2 + \frac{x-8}{12} - \frac{(x-8)^2}{288} + o(x-8)^2.$$

Пример 85. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{9}$, используя формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$

в окрестности точки $x_0 = 8$.

Решение. Возьмем формулу Тейлора из примера 84:

$$\sqrt[3]{x} = 2 + \frac{x-8}{12} - \frac{\left(x-8\right)^2}{288} + o(x-8)^2.$$

Приближенное равенство имеет вид

$$\sqrt[3]{x} \approx 2 + \frac{x-8}{12} - \frac{(x-8)^2}{288}.$$

При x=9 получаем

$$\sqrt[3]{9} \approx 2 + 0,08333 - 0,00347 = 2,07986.$$

Ответ.

$$\sqrt[3]{9} \approx 2,07986.$$

Формула Тейлора. Случай многочленов

Если $f(x)$ - многочлен степени n, то формула

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

является не приближенной, а ***точной***.

Пример 86. Разложить многочлен

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$$

по степеням $x+1$.

Решение. Воспользуемся ***точной*** формулой Тейлора третьего порядка для

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$$

в точке $x_0 = -1$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Производные:

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 3; \quad f''(x) = 12x - 2; \quad f'''(x) = 12.$$

$$f(-1) = -7; \; f'\left(-1\right) = 11; \; f''\left(-1\right) = -14; \; f'''(-1) = 12.$$

Ответ.

$$f(x) = -7 + 11(x+1) - 7(x+1)^2 + 2(x+1)^3.$$

Формула Тейлора. Использование готовых разложений

В том случае, когда $x_0 = 0$, формулу Тейлора называют ***формулой Маклорена***.

Имеется целый список функций, для которых в учебниках и справочниках приведены формулы Маклорена (таблица разложений):

1. $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

3. $$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

4. $$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

5. $$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + $$

$$+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

Пример 87.
Написать формулу Тейлора порядка n для функции

$$f(x)=\lg x$$

в окрестности точки $x_0 = 10$.

Решение. Воспользуемся формулой (4) таблицы разложений.

Для этого преобразуем данную функцию, применяя формулы для логарифма произведения и формулу перехода к новому основанию

$$\lg x = \lg(10 + (x - 10)) = \lg 10\left(1 + \frac{x-10}{10}\right) =$$

$$= 1 + \lg\left(1 + \frac{x-10}{10}\right) = 1 + \frac{1}{\ln 10}\ln\left(1 + \frac{x-10}{10}\right).$$

Теперь $\ln\left(1+\dfrac{x-10}{10}\right)$ перепишем по формуле (4) таблицы, подставляя вместо *x* выражение $\dfrac{(x-10)}{10}$. Получим равенство

$$\lg x = 1 + \frac{x-10}{10\ln 10} - \frac{(x-10)^2}{2\cdot 10^2 ln10} + \cdots +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(x-10)^n}{n\cdot 10^n \ln 10} + o\left(\frac{x-10}{10}\right)^n.$$

Локальное поведение функций

Формула Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

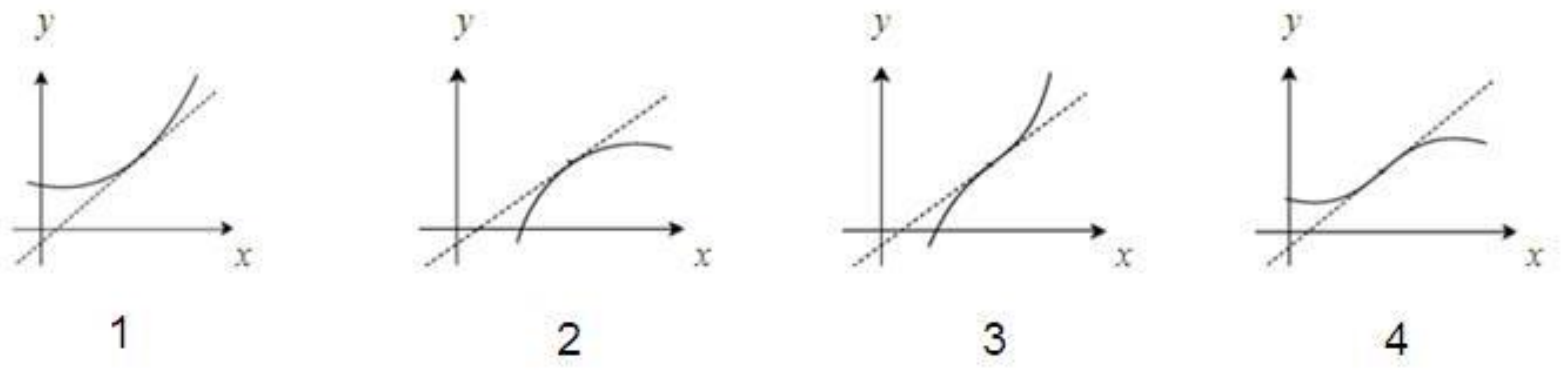
$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

где $n > 1$ - порядок первой из последовательности $f''(x_0), f'''(x_0), \ldots$ производной, отличной от нуля.

Возможны случаи:

1 - $f^{(n)}(x_0) > 0$, n - четное; 2 - $f^{(n)}(x_0) < 0$, n - четное;

3 - $f^{(n)}(x_0) > 0$, n - нечетное; 4 - $f^{(n)}(x_0) < 0$, n - нечетное.
Поведение функции в каждом из этих случаев для x из малой окрестности x_0 иллюстрируется графиком:



Пример 88. Нарисовать эскиз графика функции

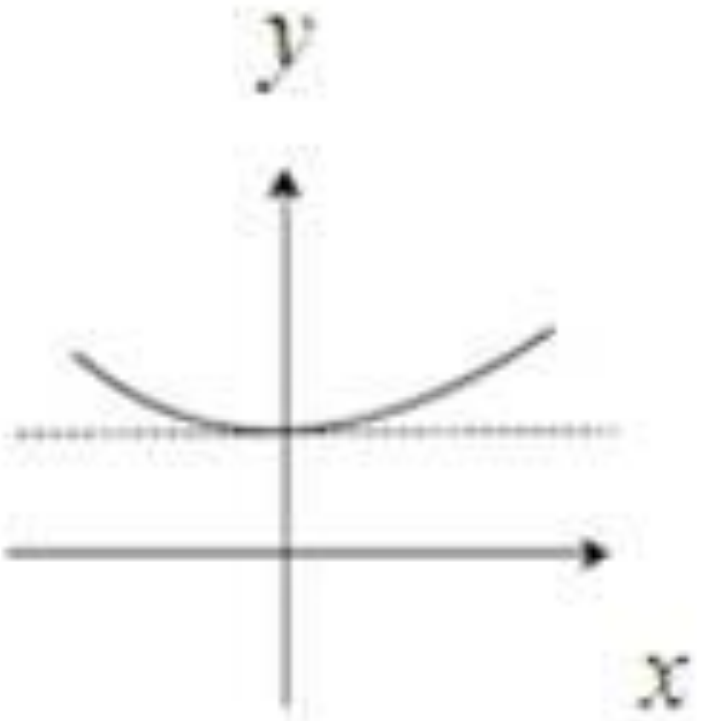
$$f(x) = x^2 + \cos x$$

в окрестности точки $x_0 = 0.$

Решение. Производные $f'(x)=2x-\sin x$, $f''(x)=2-\cos x$. При $x = x_0$ получим

$$f(x_0)=1,\ \ f'(x_0)=0,\ \ f''(x_0)=1>0.$$

Ответ. Поведение функции представляется первой (1) из представленных моделей:



Пример 89. Нарисовать эскиз графика функции

$$f(x)=1+\cos x$$

в окрестности точки $x_0 = \pi / 2.$

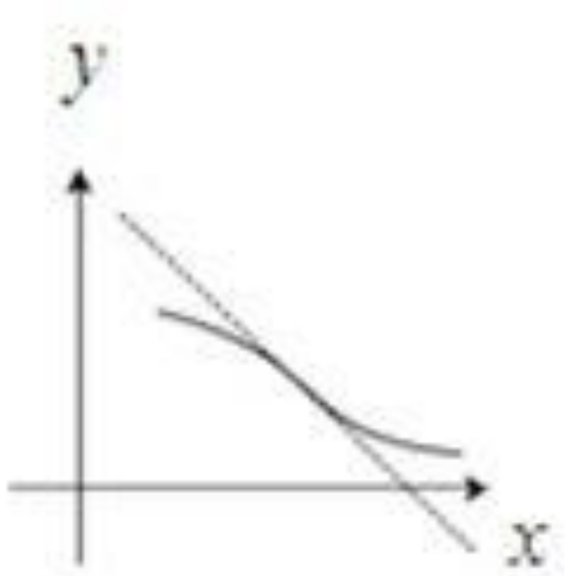
Решение. Производные

$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x.$

При $x = x_0$ получим

$$f(x_0) = 1, \;\; f'(x_0) = -1, \;\; f''(x_0) = 0, \;\; f'''(x_0) = 1 > 0.$$

Ответ. Поведение функции представляется третьей (3) из представленных моделей:



Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана.

1498, 1499, 1503, 1504, 1505, 1518.

Домашнее задание

1. Решить задачи типового расчета 2 задания 21-23

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.