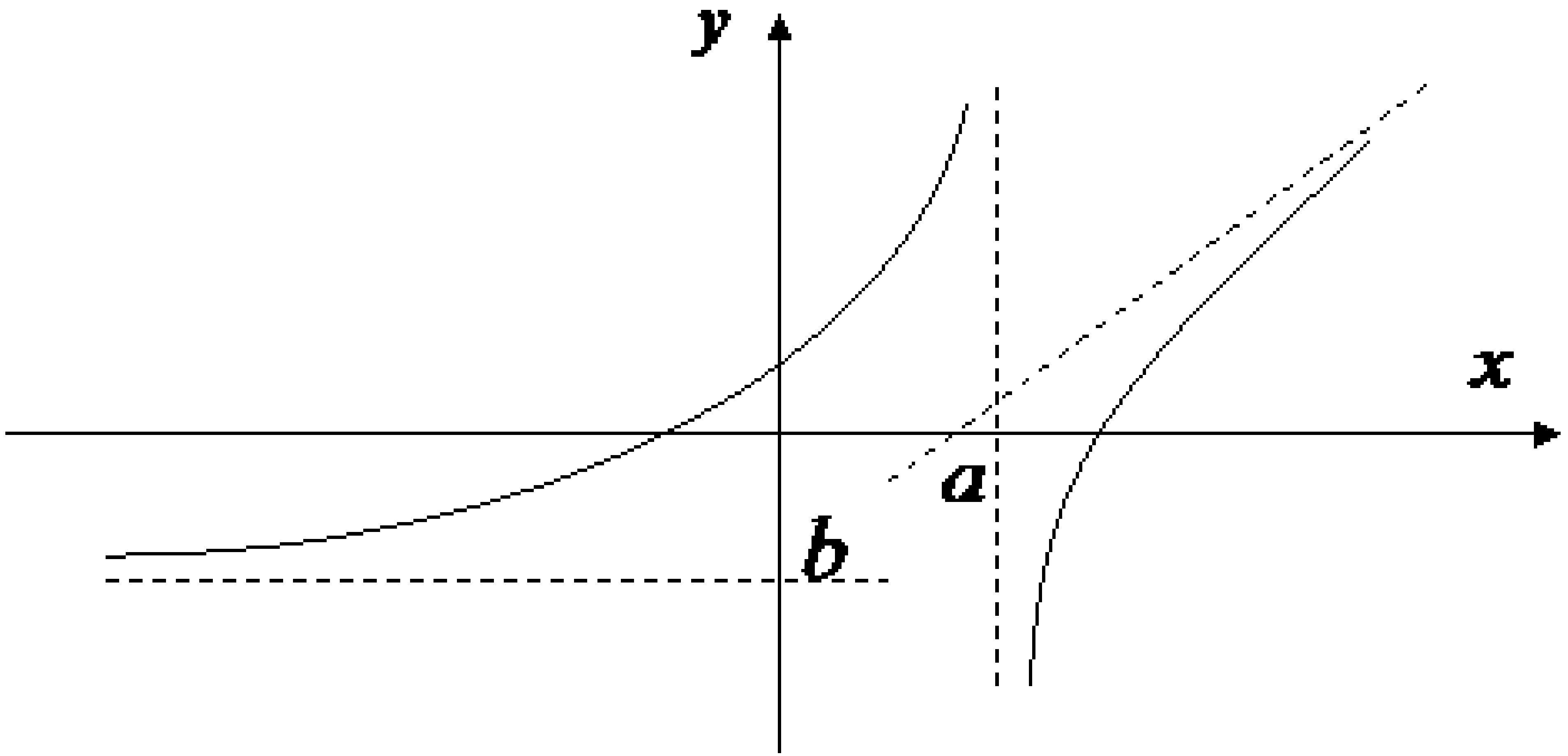
Семинар 16

Асимптоты графика функции.
Полное исследование функции

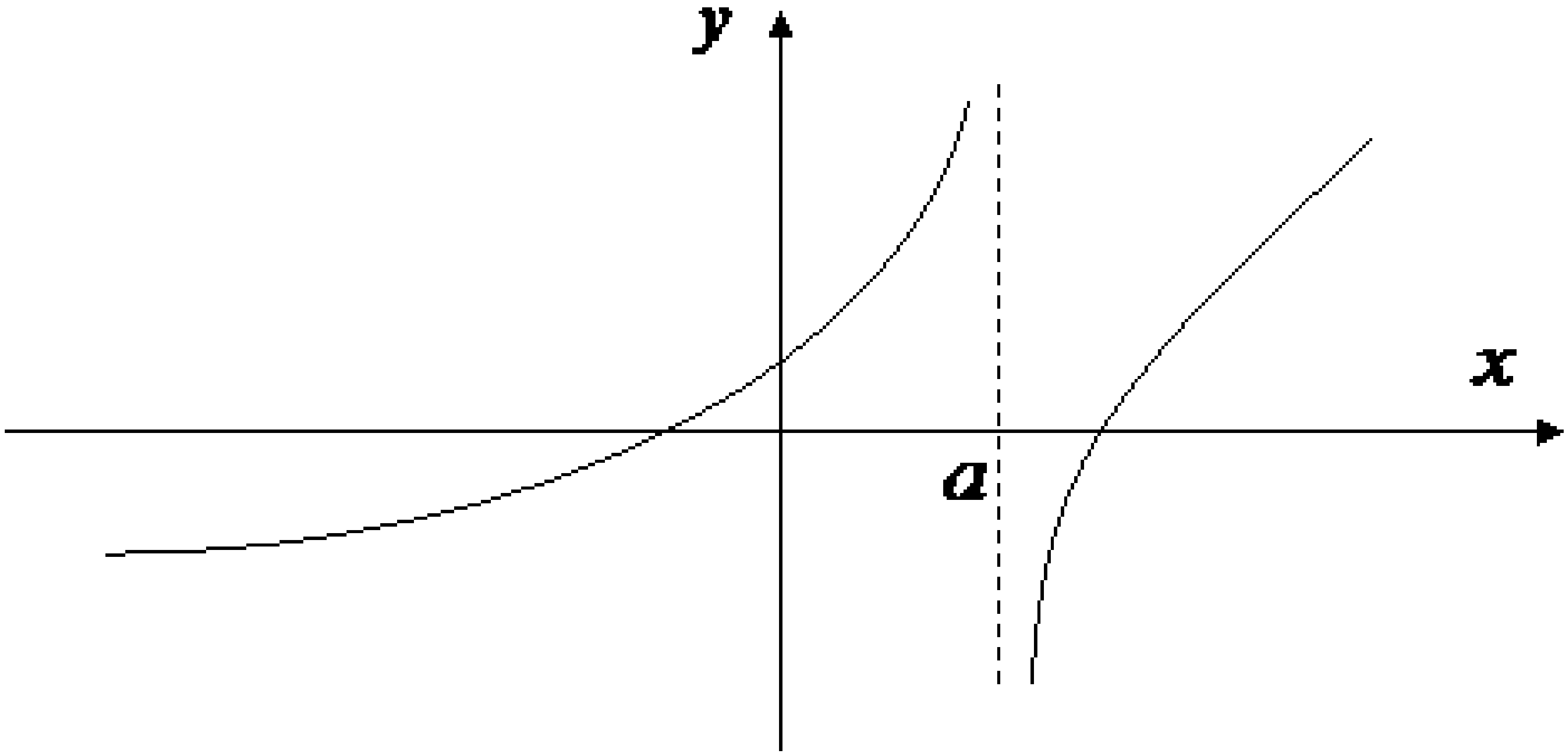
Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции при $x \to \pm\infty$ или вблизи точки разрыва 2-го рода часто оказывается, что расстояние между точками графика функции и точками некоторой прямой сколь угодно малы. Такую прямую называют ***асимптотой графика функции***.


y
x
a
b

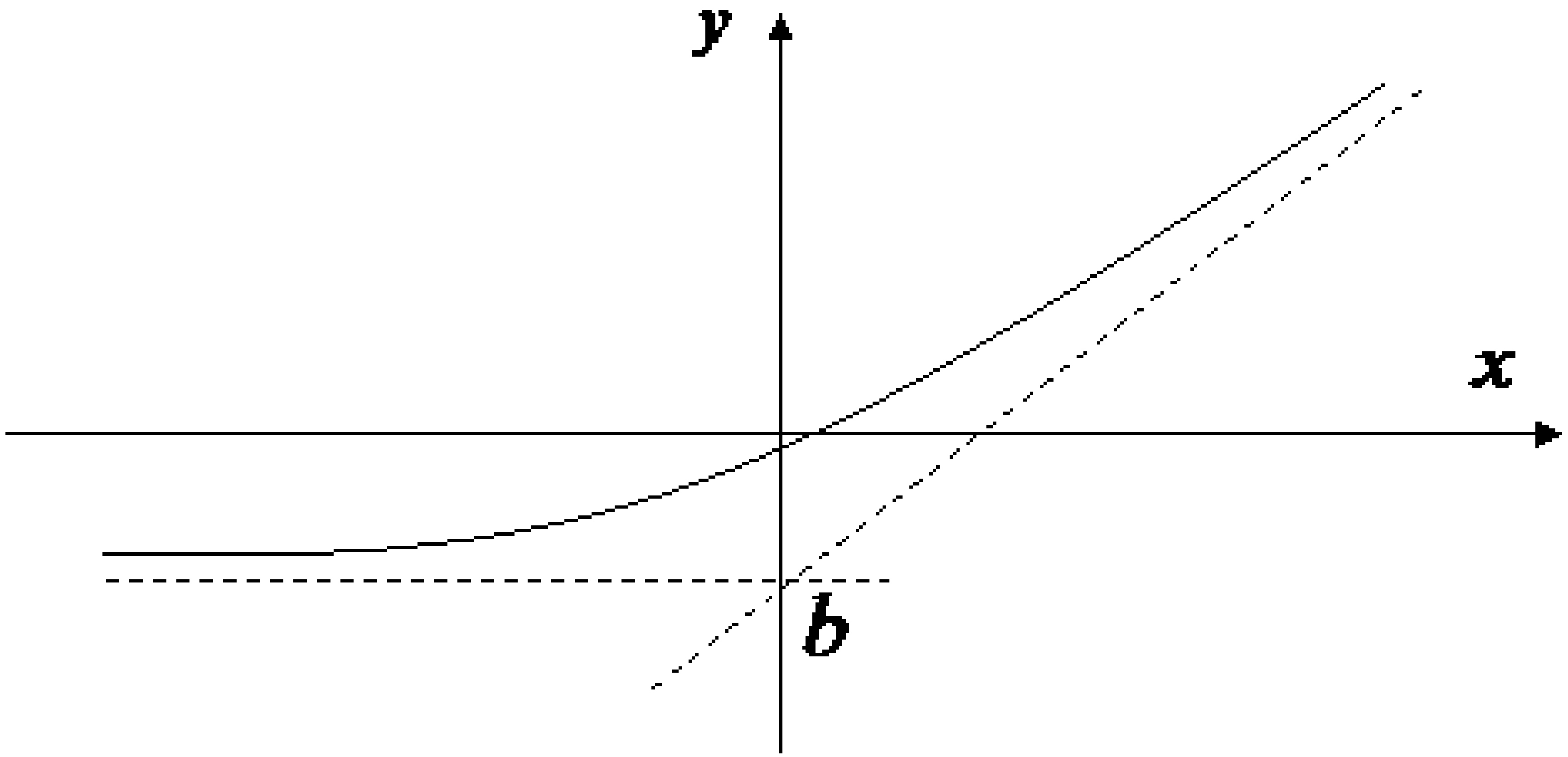
Определение. Прямая $x=a$ называется ***вертикальной асимптотой графика функции*** $y=f(x)$, если в точке $x=a$ функция имеет разрыв второго рода, т.е. хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty \quad \text{и}\left(\text{или}\right) \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty\right).$$


y
x
a

Определение. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной*** (при $k=0$ ***горизонтальной***) ***асимптотой графика функции*** $y=f(x)$ при $x \to \pm\infty$,
если функцию можно представить в виде

$$f(x)=kx+b+\alpha(x) \quad (\alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to \pm\infty).$$


y
x
b

Теорема. Для того, чтобы функция $y=f(x)$ имела наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела

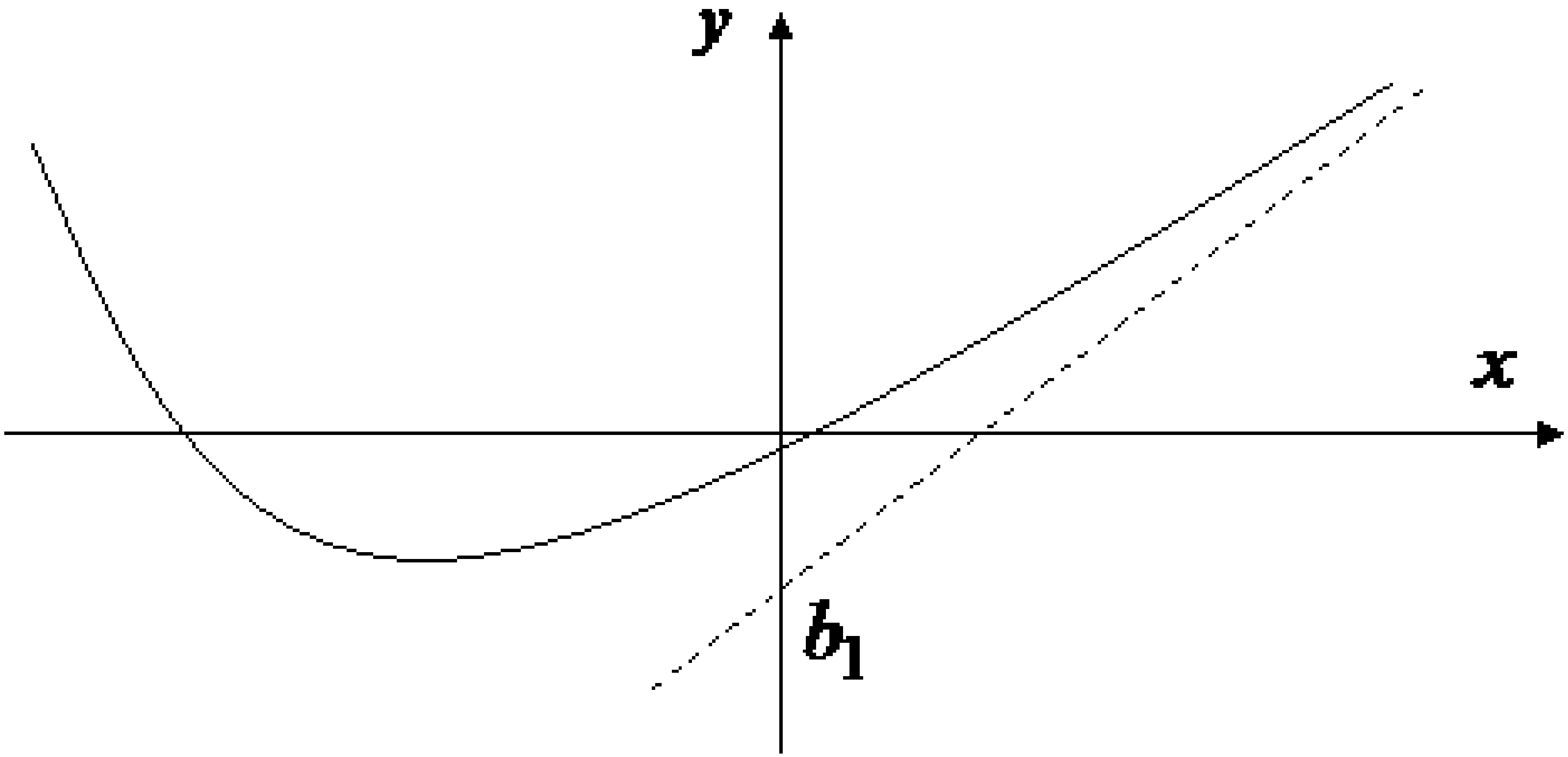
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b.$$

Прямая $y=k_1x+b_1$,

где

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x),$$

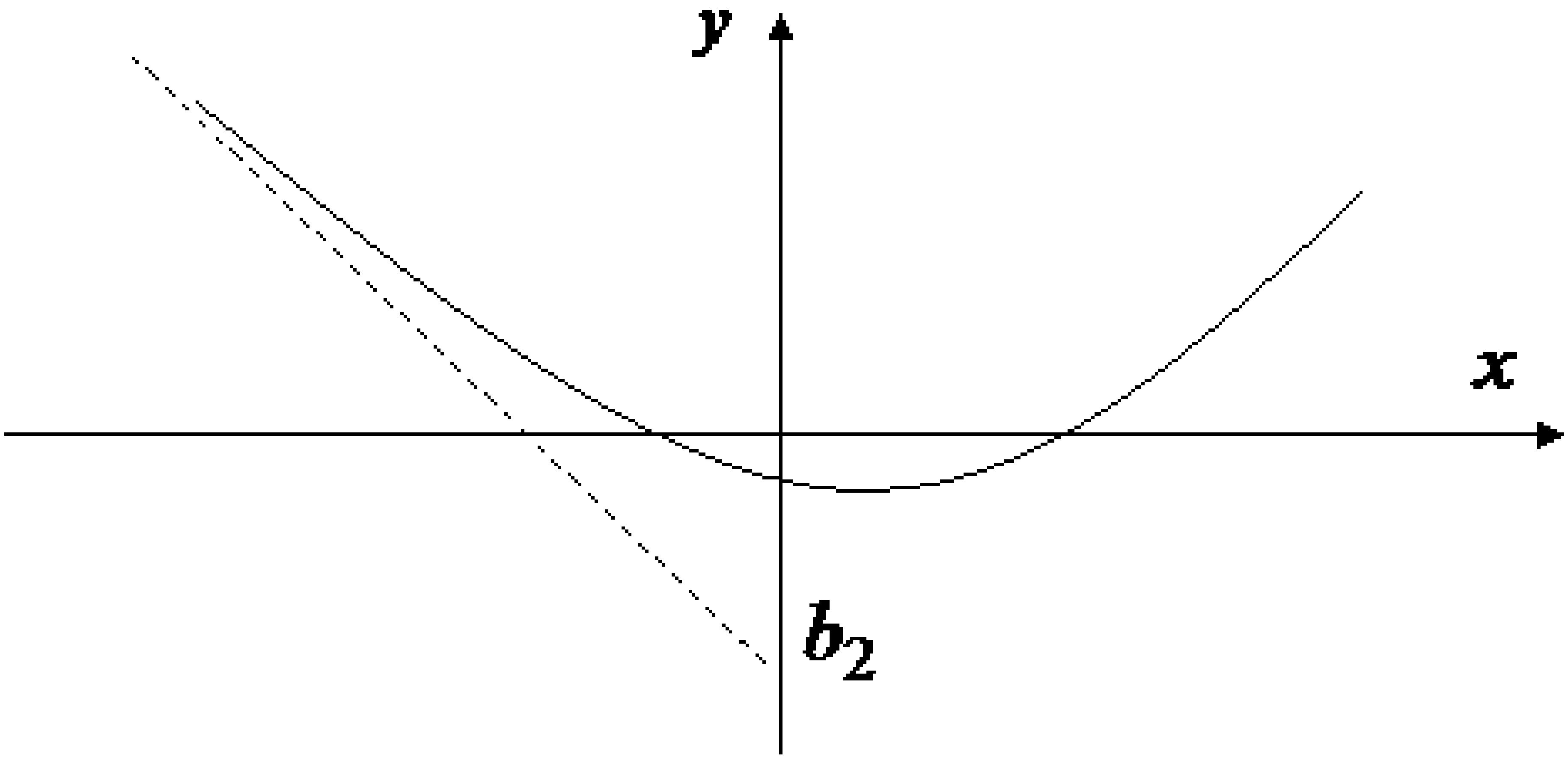
называется правосторонней наклонной асимптотой.


y
x
b_1

Прямая $y = k_2 x + b_2$, где

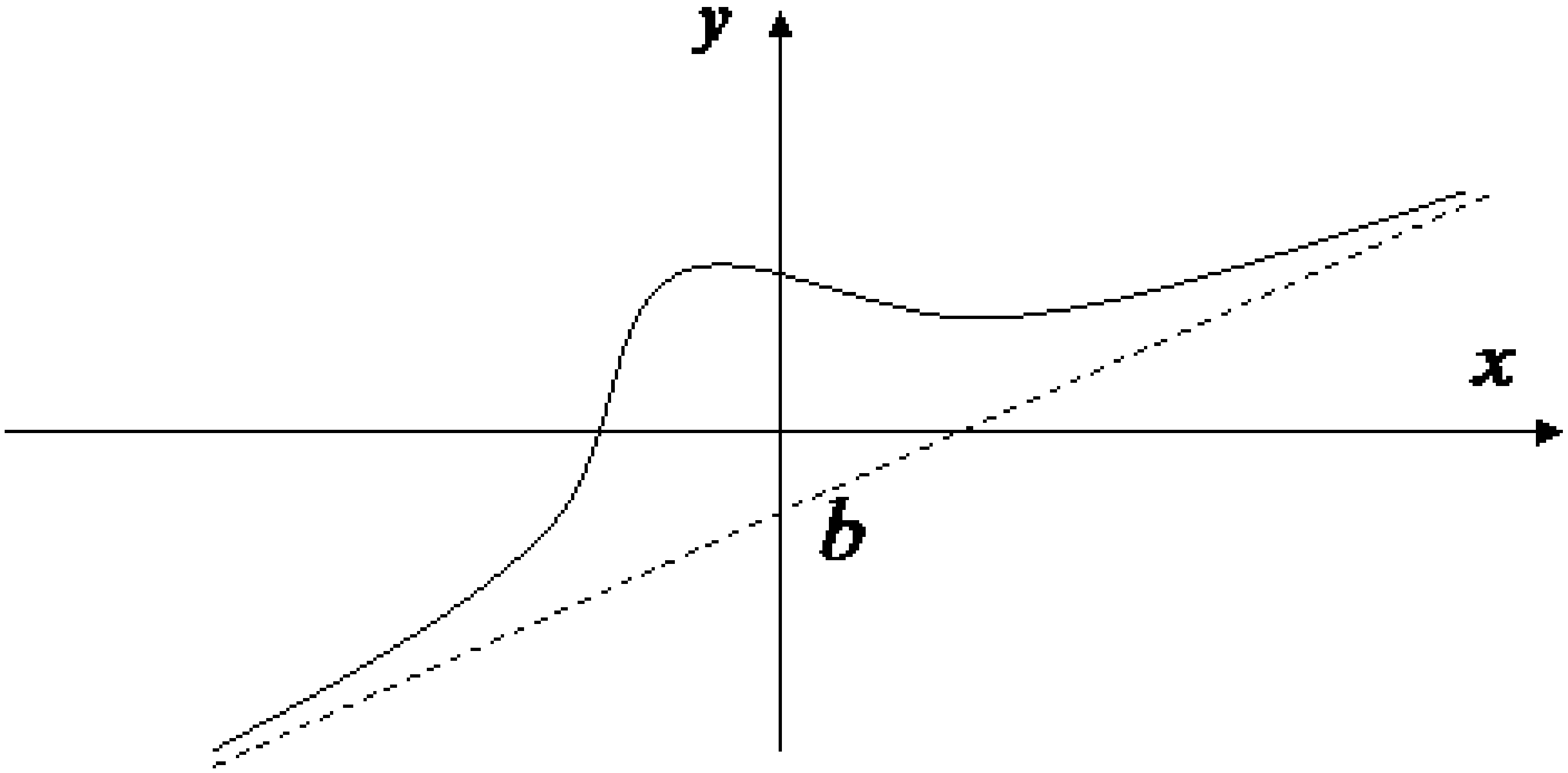
$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_2 x),$$

называется левосторонней наклонной асимптотой.



y
x
b_2

Если $k_1 = k_2 = k, \quad b_1 = b_2 = b,$ то прямая $y=kx+b$ называется двусторонней наклонной асимптотой.



Если $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$, то соответствующая асимптота горизонтальная.

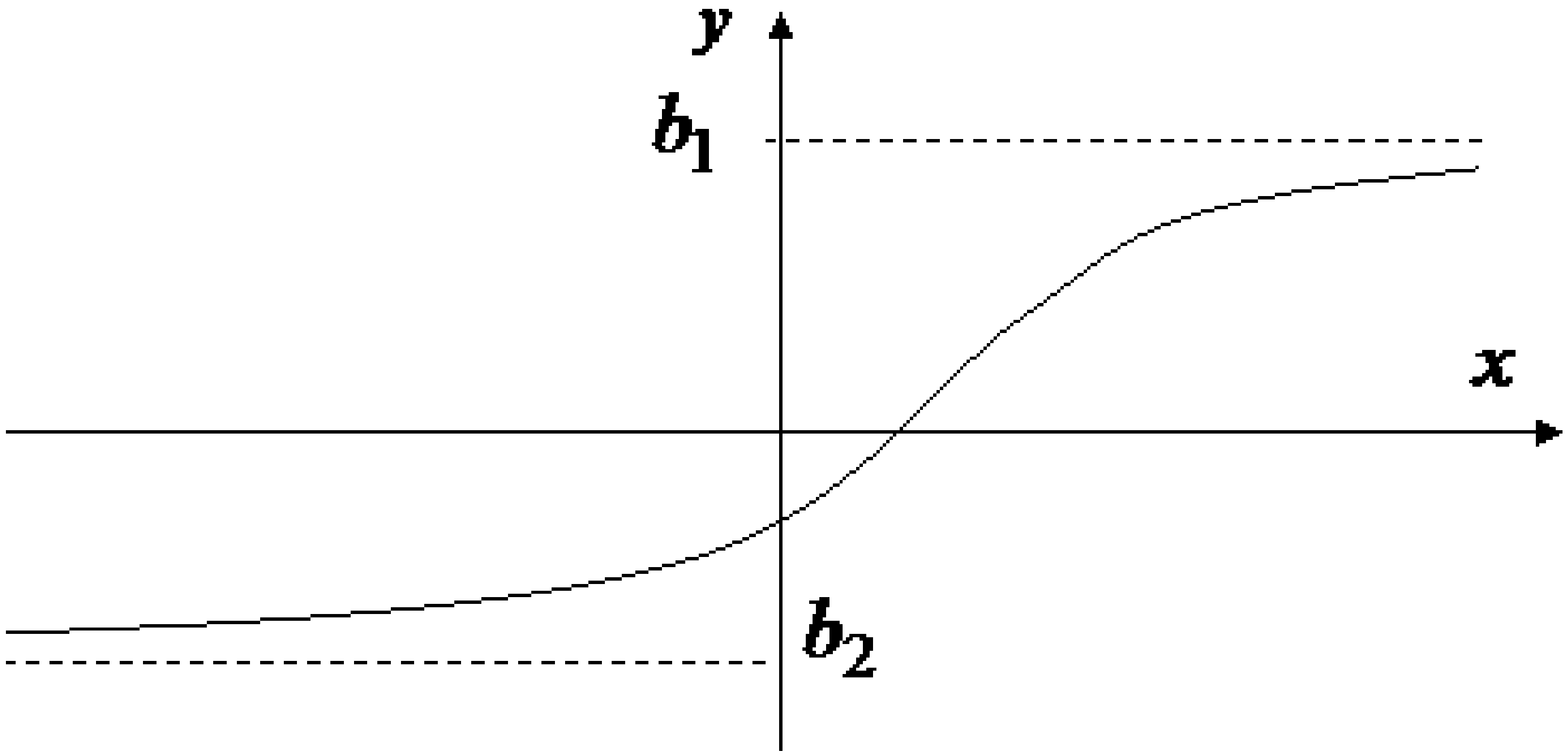
В этом случае

$$y_1 = b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

или

$$y_2 = b_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

соответственно.


y
b_1
x
b_2

Алгоритм решения задачи

1. Находим область определения функции.
2. Находим пределы функции слева (справа) в точках разрыва функции. Если один из пределов

$$\lim_{x \to a \pm 0} f(x) = \pm\infty,$$

то прямая $x=a$ - вертикальная асимптота графика функции.

3. Вычисляем два предела:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x).$$

При существовании обоих этих пределов прямая $y = k_1 x + b_1$ - правосторонняя наклонная асимптота.

4. Вычисляем два предела:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x).$$

При существовании обоих этих пределов прямая $y = k_2 x + b_2$ - левосторонняя наклонная асимптота.

5. Если $k_1 = 0,$ тогда существует правосторонняя горизонтальная асимптота $y = b_1.$
6. Если $k_2 = 0,$ тогда существует левосторонняя горизонтальная асимптота $y = b_2.$
7. Если $k_1 = k_2 = k, \quad b_1 = b_2 = b,$ то существует двусторонняя наклонная асимптота $y=kx+b$.

Пример 80. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Решение. 1. Область определения функции $x \in R$.
2. Точек разрыва нет. Вертикальных асимптот нет.
3. Вычисляем

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(1+x^2)x} = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

Правосторонняя горизонтальная асимптота $y=0$.

4. Вычисляем

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(1+x^2)x} = 0,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

Левосторонняя горизонтальная асимптота y=0.

5-7. $k_1 = k_2 = b_1 = b_2 = 0.$

Ответ. Вертикальных асимптот нет.

Уравнение двусторонней горизонтальной асимптоты y=0.

Пример 81. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Решение. 1. Область определения функции $x \in R$.

2. Точек разрыва нет. Вертикальных асимптот нет.

3. Вычисляем

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x} - 0 \cdot x) = \infty.$$

Один из пределов не существует.

Правосторонней наклонной асимптоты нет.

4. Вычисляем

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = 0,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x} - 0\cdot x) = -\infty.$$

Один из пределов не существует.

Левосторонней наклонной асимптоты нет.

Ответ.

Асимптоты графика функции не существуют.

Пример 82. Найти асимптоты графика функции

$$y=\frac{x^2}{x-1}.$$

Решение. 1. Область определения функции $x \neq 1$.

2. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^2}{x-1}$.

Введем новую переменную δ: $x = 1-\delta$, $\delta > 0$, $\delta \to 0$.

Получаем
$$\lim_{\delta\to 0} \frac{(1-\delta)^2}{1-\delta-1} = \lim_{\delta\to 0} \frac{(1-\delta)^2}{-\delta} = -\infty .$$

Аналогично
$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \left| \begin{matrix} x = 1+\delta \\ \delta > 0,\ \delta \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{\delta\to 0} \frac{(1+\delta)^2}{1+\delta-1} = \lim_{\delta\to 0} \frac{(1+\delta)^2}{\delta} = \infty.$$

Оба предела функции в точке $x=1$ не существуют.

Уравнение вертикальной асимптоты $x=1$.

3. Вычисляем

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1\cdot x \right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Уравнение правосторонней наклонной асимптоты

$$y_1 = k_1 x + b_1 = x + 1.$$

4. Вычисляем

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1\cdot x \right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Уравнение левосторонней наклонной асимптоты

$$y_2 = k_2 x + b_2 = x + 1.$$

5-7. $k_1 = k_2 = k,\ b_1 = b_2 = b.$

Уравнение двусторонней наклонной асимптоты $y=kx+b=x+1$.

Ответ.

Уравнение вертикальной асимптоты $x=1$.

Уравнение двусторонней наклонной асимптоты $y=x+1$.

Пример 83. Найти асимптоты графика функции

$$y = e^{-1/x^2}.$$

Решение. 1. Область определения функции $x \neq 0$.
2. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0-0} e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{e^{1/x^2}} = 0.$$

Аналогично

$$\lim_{x\to 0+0} e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{e^{1/x^2}} = 0.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=0$ равные.
Следовательно, в этой точке устранимый разрыв.
Вертикальная асимптота не существует.

3. Вычисляем

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\cdot e^{1/x^2}} = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty} (e^{-1/x^2} - 0\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{1/x^2}} = 1.$$

Уравнение правосторонней горизонтальной асимптоты

$$y_1 = 1.$$

4. Вычисляем

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x \cdot e^{1/x^2}} = 0,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{-1/x^2} - 0 \cdot x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{1/x^2}} = 1.$$

Уравнение левосторонней горизонтальной асимптоты

$$y_2 = 1.$$

5-7. $k_1 = k_2 = k = 0, \; b_1 = b_2 = b = 1.$

Уравнение двусторонней горизонтальной асимптоты

y=1.

Ответ. Вертикальных асимптот нет.

Уравнение двусторонней горизонтальной асимптоты

y=1.

Полное исследование функции и построение графиков

При построении графика функции можно придерживаться следующей схемы:

1) Найти область определения функции. Проверить, является ли функция четной, нечетной, периодической. Найти точки пересечения функции с осями координат. Найти точки разрыва функции.

2) Найти асимптоты графика. Найти односторонние пределы функции в граничных точках области определения и в точках разрыва.

3) Найти первую производную, определить экстремумы функции и промежутки ее возрастания и убывания.

4) Найти вторую производную, определить точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз.

5) Нарисовать эскиз графика функции.

Аудиторная работа

Решаем задачи из Бермана.

1375, 1376, 1377, 1378, 1379, 1380-1388, 1409

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятия 17, 18
2. Решить задачи типового расчета 2 задания 25, 26

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.