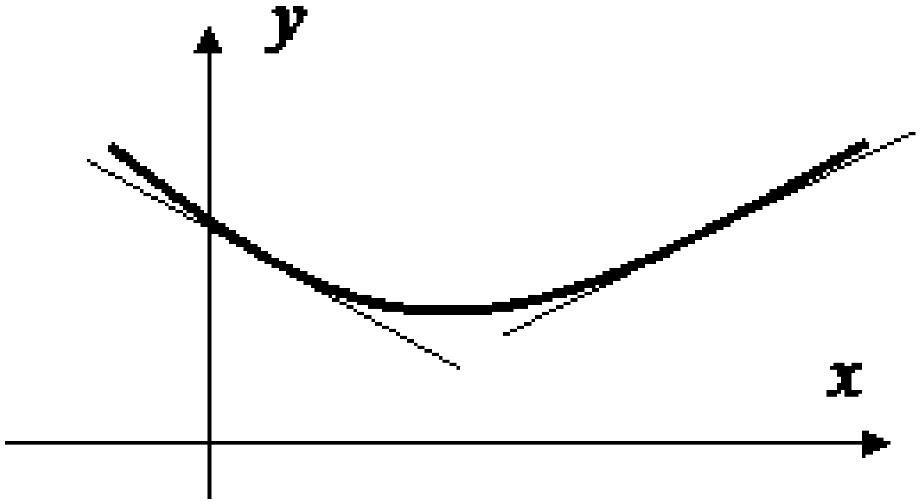
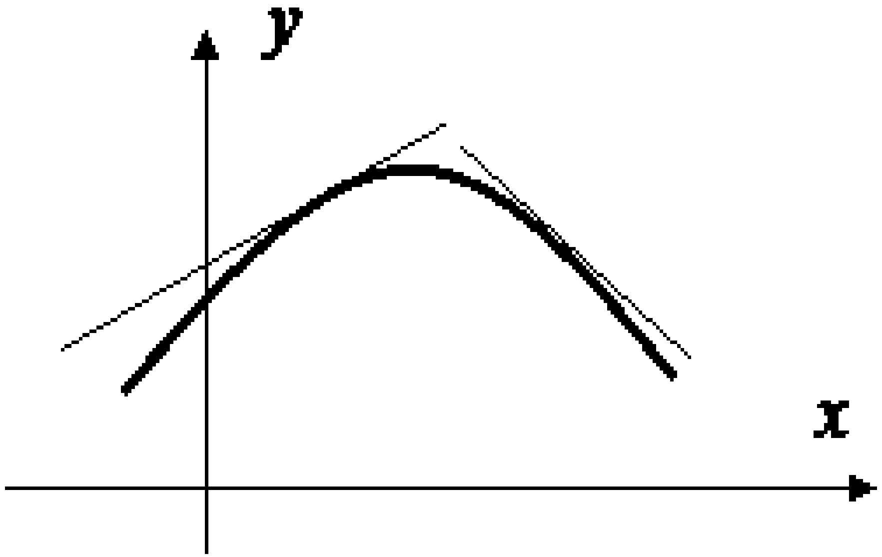
Семинар 15

Интервалы выпуклости. Точки перегиба

Определение. Условие выпуклости функций. График дифференцируемой функции $f(x)$ называется ***выпуклым вниз (выпуклым вверх)*** на интервале $(a;b)$, если все точки графика функции лежат выше (ниже) касательной, проведенной к графику функции в любой точке интервала $(a;b)$





Термины ***выпуклость вниз*** и ***вогнутость*** эквивалентны.

Аналогично ***выпуклость вверх*** и ***выпуклость*** эквивалентны.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может, самой точки x_0.

Если существуют интервалы

$$(x_0-\delta, x_0) \quad \text{и} \quad (x_0, x_0+\delta), \quad \delta > 0,$$

на одном из которых $f(x)$ строго выпукла вниз, а на другом строго выпукла вверх, то говорят, что при переходе через точку x_0 функция $f(x)$ ***меняет направление выпуклости***.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную.

Тогда, если функция $f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет направление выпуклости, то точка x_0 называется ***точкой перегиба функции***.

Необходимое и достаточное условие выпуклости

Для того, чтобы функция $f(x)$, ***дважды дифференцируемая на интервале*** $(a;b)$, была выпуклой вниз (выпуклой вверх) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы вторая производная $f''(x)$ была неотрицательная (неположительная) на этом интервале, т. е.

$$f''(x) \geq 0 \;\; (f''(x) \leq 0), \;\; x \in (a;b).$$

Достаточное условие строгой выпуклости вниз (строгой выпуклости вверх)

Условие $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$, $x\in(a;b)$ является достаточным условием строгой выпуклости вниз (строгой выпуклости вверх) функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

Необходимое условие существования точки перегиба

Если точка x_0 является точкой перегиба функции, то либо $f''(x_0)=0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Достаточные условия существования точек перегиба

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Тогда точка x_0 является точкой перегиба $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, в которой

либо $f''(x)<0$ при $x < x_0$ и $f''(x)>0$ при $x > x_0$,

либо $f''(x)>0$ при $x < x_0$ и $f''(x)<0$ при $x > x_0$.

Алгоритм решения задачи

1. Находим область определения функции.
2. Находим первую производную функции.
3. Находим вторую производную функции.
4. Определяем критические точки для второй производной функции (вторая производная равна нулю или не существует).

5. Определяем интервалы знакопостоянства второй производной.
6. Находим интервалы выпуклости и вогнутости функции.
7. Находим точки в которых функция $f(x)$ меняет направление выпуклости.
8. Находим точки перегиба.

Пример 77. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Решение. 1. Область определения функции $x \in R$.
2. Первая производная функции равна

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

3. Вторая производная функции равна

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.$$

4. Вторая производная функции существует для любого *x*. Нули второй производной находим из решения уравнения

$$6x^2 - 2 = 0.$$

Решением уравнения являются точки

$$x_1 = -1/\sqrt{3}, \quad x_2 = 1/\sqrt{3}.$$

Итак критическими (или стационарными) для второй производной функции являются точки

$$x_1 = -1/\sqrt{3}, \quad x_2 = 1/\sqrt{3}.$$

5. Интервалами знакопостоянства для второй производной функции являются значения

$$x \in \left(-\infty; -1/\sqrt{3}\right) \cup \left(-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}\right) \cup \left(1/\sqrt{3}; \infty\right).$$

6. Находим интервалы выпуклости и вогнутости функции:

функция выпукла

$$f''(x) < 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x \in \left(-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}\right),$$

функция вогнута

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; -1/\sqrt{3}\right) \cup \left(1/\sqrt{3}; \infty\right).$$

7.-8. Смена знаков второй производной происходит в точках $x_1 = -1/\sqrt{3}, \quad x_2 = 1/\sqrt{3}.$

В этих точках функция определена.

Следовательно, эти точки являются точками перегиба функции.

Ответ.

Функция:

выпукла на интервале $x \in \left(-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}\right)$,

вогнута на интервалах $x \in \left(-\infty; -1/\sqrt{3}\right) \cup \left(1/\sqrt{3}; \infty\right)$.

Точки перегиба функции $x_1 = -1/\sqrt{3}$, $x_2 = 1/\sqrt{3}$.

Пример 78. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Решение. 1. Область определения функции $x \in R$.

2. Первая производная функции равна

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

3. Вторая производная функции равна

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}.$$

4. Вторая производная функции не существует в точке $x=0$.

Вторая производная не равна нулю для любого x.

5. Интервалами знакопостоянства для второй производной функции являются значения $x \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$.

6. Находим интервалы выпуклости и вогнутости функции:

$f''(x)<0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x \in (0;+\infty)$ - выпукла,

$f''(x)>0 \Rightarrow x<0 \Rightarrow x \in (-\infty;0)$ - вогнута.

7.-8. Смена знаков второй производной происходит в точке $x=0$. В этой точке функция определена. Следовательно, эта точка является точкой перегиба функции.

Ответ.

Функция:

выпукла на интервале $x \in (0;+\infty)$

вогнута на интервале $x \in (-\infty;0)$

Точка перегиба функции $x=0$.

Пример 79. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции

$$f(x)=\frac{1}{x-1}.$$

Решение. 1. Область определения функции

$$x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

2. Первая производная функции равна

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

3. Вторая производная функции равна

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

4. Вторая производная функции не существует в точке $x=1$.

Вторая производная не равна нулю для любого x.

5. Интервалами знакопостоянства для второй производной функции являются значения

$$x \in (-\infty;1) \cup (1;\infty).$$

6. Находим интервалы выпуклости и вогнутости функции

$f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty;1)$ - выпукла,

$f''(x) > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1;+\infty)$ - вогнута.

7. Смена знаков второй производной происходит в точке x=1.
В этой точке функция не определена.
Следовательно, эта точка не является точкой перегиба функции.

Ответ.

$x \in (-\infty;1)$ - функция выпукла,

$x \in (1;+\infty)$ - функция вогнута.

Точки перегиба отсутствуют.

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 1288, 1371, 1185

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятие 17

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.