Семинар 14

Монотонность функции, экстремум функции.

Необходимые и достаточные условия монотонности и экстремума функции

Промежутки монотонности

Для нахождения промежутков монотонности (возрастания или убывания) функции $y=f(x)$ используют достаточное условие, связанное со знаком производной:

***если на интервале** (a, b) **производная** $f'(x)>0$,*
***то функция** $f(x)$ **возрастает на** (a, b),*
***если на интервале** (a, b) **производная** $f'(x)<0$,*
***то функция** $f(x)$ **убывает на** (a, b).*

Необходимое условие экстремума

Равенство нулю производной или производная не существует.

Достаточные условия экстремума

1. Смена знака производной.
2. Производная равна нулю, тогда:

   вторая производная больше нуля – минимум,

   вторая производная меньше нуля – максимум.

Примеры решения задач

Пример 74. Найти интервалы возрастания функции

$$y = x^3 + 6x^2 + 9x$$

и ее экстремумы (максимумы и минимумы).

Решение. Область определения функции

$$D(y)=(-\infty,+\infty).$$

Найдем

$$y' = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3) = 3\left(x+1\right)\left(x+3\right).$$

Нули производной $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$.

Знаки производной распределены на числовой оси в соответствии со схемой:

y':	+	[0]	−	[0]	+	
		−3		−1		x
y:	↗	max	↘	min	↗	

Ответ. Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(-1; +\infty)$.

$$y_{\max} = y(-3) = 0, \quad y_{\min} = y(-1) = -4.$$

Пример 75.

Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$$

и ее экстремумы.

Решение. Область определения функции

$$D(f)=\left(-\infty,+\infty\right).$$

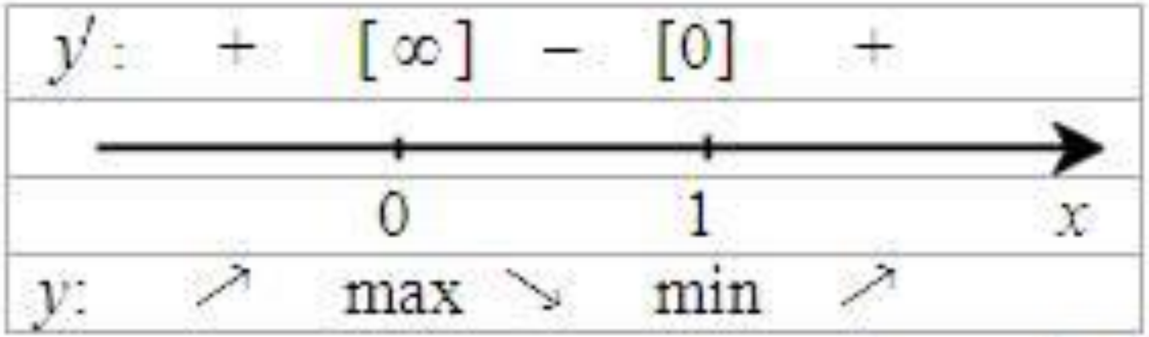
$$f'(x)=2-2x^{-1/3}=2\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Определим знаки производной методом интервалов.

Нули числителя – «стационарные» точки функции (где $f'(x)=0$): $x=1$.

Нули знаменателя – остальные критические точки функции (где производная не существует) $x=0$.

Знаки производной распределены на числовой оси в соответствии со схемой:



Ответ. функция возрастает на интервалах $(-\infty,0)$ и $(1;+\infty)$; убывает на $(0;1)$.

$y_{max}=y(0)=0$, $y_{min}=y(1)=-1$.

Пример 76.
Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

и ее экстремумы.

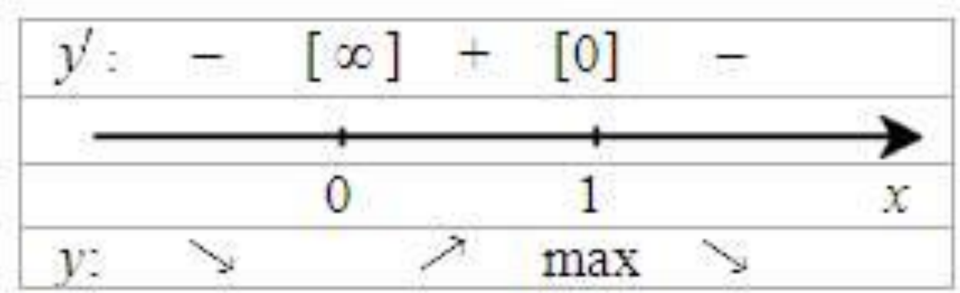
Решение. Область определения функции

$$D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=-2\cdot\frac{x-1}{x^3}.$$

Определим знаки производной методом интервалов. Нули числителя – «стационарные» точки функции (где $f'(x)=0$): $x=1$.
Нули знаменателя – остальные критические точки функции (где производная не существует) $x=0$.

Знаки производной распределены на числовой оси в соответствии со схемой:



Ответ. функция убывает на интервалах $(-\infty,0)$ и $(1;+\infty)$; возрастает на $(0;1)$.

$y_{\max}=y(1)=1$

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 1143, 1165, 1270

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятие 17

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.