Семинар 13

Вычисление пределов с помощью правила Лопиталя

Правило Лопиталя

Теорема. Если при x, стремящемся к a, обе функции $f(x)$ и $g(x)$

(1) стремятся к нулю или бесконечности,

(2) предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L,$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

Допускаются случаи:

$a=-\infty$;

$a=\infty$;

a - число, и *x*, стремится к *a* слева;

a - число, и *x*, стремится к *a* справа.

L – число.

L – бесконечность.

Говорят, что дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в условиях теоремы есть ***неопределенность вида*** $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Правило Лопиталя позволяет ***раскрыть*** эту ***неопределенность***.

Пример 68. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Решение. Заметим, что $\ln x$ и $\sqrt{x}$ стремятся к ∞ при $x \to \infty$, то есть перед нами неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Найдем $$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

В соответствии с правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Пример 69. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}.$$

Решение. Заметим, что e^{2x} и x^2 стремятся к ∞ при $x \to \infty$, то есть перед нами неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Найдем $$\lim_{x\to\infty}\frac{(e^{2x})'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x}.$$

Опять получили неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Найдем $$\lim_{x\to\infty}\frac{(e^{2x})'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=\infty.$$

Отсюда, из правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = \infty.$

Второе применение правила Лопиталя дает

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = \infty.$$

Пример 70. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{\sin 3\pi x}.$$

Решение. Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Найдем

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ln(3x-2))'}{(\sin 3\pi x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{3x-2}}{3\pi\cos 3\pi x}=-\frac{1}{\pi}.$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{\sin 3\pi x}=-\frac{1}{\pi}.$$

Правило Лопиталя и неопределенности,

не имеющие вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Кроме случаев $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ выделяют такие

неопределенности, то есть такое поведение функций, образующих выражение под знаком предела:

$$(0\cdot\infty),\ \left(\infty^{0}\right),\ \left(0^{0}\right),\ \left(1^{\infty}\right),\ (\infty-\infty).$$

При таком предельном поведении функций нельзя применить правило Лопиталя.

Для этих неопределенностей можно пытаться применить правило Лопиталя, преобразовав выражение под знаком предела так, чтобы выделить дробь вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и уже к ***НЕЙ*** применить правило Лопиталя.

Возможны преобразования:

Схема 1. $$u \cdot v = \frac{u}{v^{-1}}.$$

Схема 2. $$u^{v} = e^{v\ln u} = e^{\frac{\ln u}{v^{-1}}}.$$

Во второй схеме дробь образуется в показателе степени – ее предел и следует искать.

Пример 71. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\,\ln x.$$

Решение. По схеме 1 $\sqrt{x}\ln x = (0\cdot\infty) = \dfrac{\ln x}{x^{-1/2}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).$
Найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1/2})'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-(1/2)x^{-3/2}} = -\lim_{x\to 0} 2\sqrt{x} = 0.$$

В соответствии с правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x = 0.$$

Пример 72. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Неопределенность $\left(0^0\right)$.

Решение. По схеме 2

$$(\sin x)^x = e^{x\ln\sin x} = e^{\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}} = e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}.$$

Вычислим предел в показателе степени с помощью правила Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{-x^{-2}\sin x} = -\lim_{x\to 0} x\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}.$$

Дробь под знаком последнего предела стремится к единице (первый замечательный предел) .

Произведение ($x\cos x$)=(*б.м.*)(*огр.*)=*б.м.*

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln \sin x)'}{(x^{-1})'} = 0.$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0} x\ln\sin x = 0.$$

Поэтому $$\lim_{x\to 0}(\sin x)^{x} = e^{0} = 1.$$

Пример 73. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Неопределенность $\left(1^{\infty}\right)$.

Решение. По схеме 2 $(\cos x)^{1/x^2}=e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}=e^{\left(\frac{0}{0}\right)}.$

Найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right|=-\frac{1}{2}.$$

По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=-\dfrac{1}{2},$

откуда $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=e^{-1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}.$

Неопределенность вида $(\infty - \infty)$ приведением к общему знаменателю приводит к неопределенностям

$$\left(\frac{0}{0}\right) \text{ или } \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Пример 73.1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Неопределенность $(\infty - \infty)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot\left(e^x-1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot\left(e^x-1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x\left(2+x\right)}=\frac{1}{2}.$$

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 1324, 1328, 1333, 1337, 1349, 1357, 1365

Домашнее задание

1. Решить задачи 19, 20 типового расчета 2
2. Решить задачи из Бермана занятие 16

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.