Семинар 12

Производные высших порядков для функций заданных явно, неявно и параметрически.

Дифференциал функции и его использование в приближенных вычислениях

Повторное дифференцирование

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на множестве X, тогда на X определена функция $y'=f'(x)$ переменной x.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема на X, то ее производная $(f'(x))'$ называется второй производной функции $y=f(x)$ и находится по формуле $y''=(f'(x))'=(y')'$.

Аналогично определяется производная третьего порядка $y'''=(y'')'$.

Производная n -го порядка $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.

Производную n -го порядка функции $y=f(x)$ обозначают

$$\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Примеры нахождения производных

Пример 65.
Найти производную второго порядка функции

$$y=\operatorname{arctg}x$$

Решение. Производная функции равна

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Вторую производную находим, дифференцируя y'

$$y'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \left(\left(1+x^2\right)^{-1}\right)' = -\left(1+x^2\right)^{-2}\left(x^2\right)' = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Дифференциал функции

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке множества X, то есть для любого $x \in X$ имеет место равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

По определению предела функции существует бесконечно малая функция $\alpha(\Delta x)$ ($\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$) такая, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

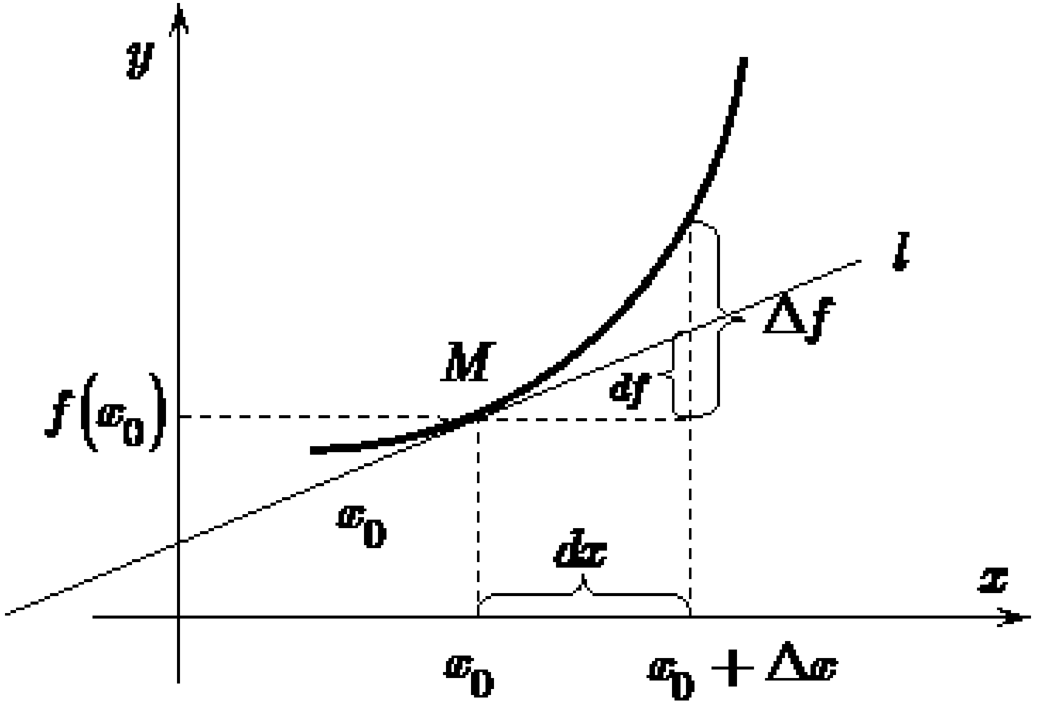
и приращение функции при $\Delta x\to 0$ можно представить в виде $\Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$.

Первое слагаемое в полученном выражении является главной линейной относительно Δx частью приращения функции и называется дифференциалом функции. Обозначается $df(x)=f'(x)\Delta x$.

Так как по полученному определению дифференциала $dx=x'\Delta x=\Delta x$, то дифференциал функции равен $df(x)=f'(x)dx$.

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал $df(x_0)$ равен приращению ординаты касательной l к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ при приращении аргумента Δx.



Свойства дифференциала

1. $d(Cf)=Cdf$;
2. $d(u \pm v)=du \pm dv$;
3. $d(uv)=vdu+udv$;
4. $$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2};$$

5. Форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента (свойство ***инвариантности формы дифференциала***).

Если $y=f\,(x)$, где $x=\varphi\,(t)$, то

$$df\,(x)=f'(x)dx \Rightarrow d\,\underbrace{f\,(\varphi(t))}_{f(t)}=\underbrace{f'(\varphi(t))\varphi'(t)}_{f'(t)}dt.$$

Дифференциалы высших порядков

Дифференциал первого порядка функции $f(x)$ – это линейная относительно Δx функция: $df(x)=f'(x)dx$.

Считая df функцией переменной x, найдем ее дифференциал, который будем называть ***дифференциалом второго порядка*** функции $y=f(x)$ в некоторой точке и обозначим:

$$d^2y = d(df(x)).$$

Так как переменной дифференцирования является x, а dx – фиксированное приращение и $(dx)'=0$, то

$$d(df(x)) = d(f'(x)dx) = df'(x)dx + f'(x)d(dx) =$$

$$= f''(x)dx \cdot dx + f'(x) \cdot 0 = f''(x)dx^2.$$

Таким образом, $$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков:

$$d^3y = f'''(x)dx^3;$$

$$\dots$$

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n;$$

$$\dots$$

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Так как дифференциал функции есть главная часть ее приращения, то при $\Delta x \to 0$ верно приближенное равенство с точностью до $o(\Delta x)$: $\Delta f \approx df\,(x)$, откуда следует ***формула приближенного вычисления значения функции*** в точке

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

При этом абсолютная погрешность вычислений $\Delta = |\Delta f - df\,| \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Замечание. При вычислении приближенного значения функции с помощью дифференциала, x_0 нужно выбирать так, чтобы значения функции и ее производной в этой точке вычислялись точно, а $\Delta x \to 0$.

Примеры нахождения дифференциалов

Пример 66. Вычислить значение дифференциала функции y=arcsin2x в точке $x_0 = 1/4$, соответствующего приращению аргумента Δx=0,025.

Решение. Искомый дифференциал функции в точке x_0 равен $dy(x_0) = y'(x_0)\Delta x$.

Найдем y': $$y' = (\arcsin 2x)' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Значение производной в точке $x_0 = 1/4$ равно

$$y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{1-4/16}} = \frac{8}{\sqrt{12}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ. $$dy\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot 0{,}025 = \frac{0{,}1\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

Примеры приближенных вычислений

Пример 67. Вычислить приближенно arctg0,98.

Решение. Применим формулу приближенного вычисления

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

полагая

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = -0{,}02.$$

Значение функции в точке x_0 равно

$$f(x_0) = f\left(1\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Производная функции равна

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

а ее значение в точке x_0

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, подставляя найденные значения в формулу, находим

Ответ. $$\operatorname{arctg} 0,98 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-0,02\right) = \frac{\pi}{4} - 0,01.$$

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 1006, 1009, 1015, 1037, 1064, 1069, 1074(2), 889(4,11,12,19), 898, 899, 901, 906(1,3,6)

Домашнее задание

1. Решить задачу 18 типового расчета 2
2. Решить задачи из Бермана занятия 14, 15

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.