Семинар 11

Производная функции, заданной параметрически.

Геометрический смысл производной.

Уравнений касательной и нормали к графику функции

Производная функции, заданной параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

где t – вспомогательная переменная, называемая параметром.

Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные, и функция $x=x(t)$ имеет обратную, которая также имеет производную, тогда определенная параметрическими уравнениями функция $y=y(x)$ имеет производную и

$$y'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}.$$

Данная формула дает возможность находить производную $y'_x(x)$ от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Примеры дифференцирования функций

Пример 58.

Функция y от x задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in R.$$

Найти производную $y'_x(x)$ при любом значении t.

Решение. Применяя формулу $y'_x(x) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$,

находим производную

$$y'_x(x) = \frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

$$t \neq 2k\pi \quad \left(k \in Z\right).$$

Пример 59.

Функция y от x задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}.$$

Найти производную $y'_x(x)$ при любом допустимом значении t.

Решение. Применяя формулу $y'_x(x) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$,

находим производную

$$y'_x(x) = \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)'}{(\arcsin t)'} = \frac{\dfrac{(1-t^2)'}{2\sqrt{1-t^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = \frac{-2t}{2} = -t,$$

$t \in \left(-1;1\right).$

Пример 60.

Функция *y* от *x* задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t} \\ y = t\ln t \end{cases}.$$

Найти производную $y'_x(x)$ при любом допустимом значении $t \in \left(0;+\infty\right)$.

Решение. Применяя формулу $y'_x(x) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$,

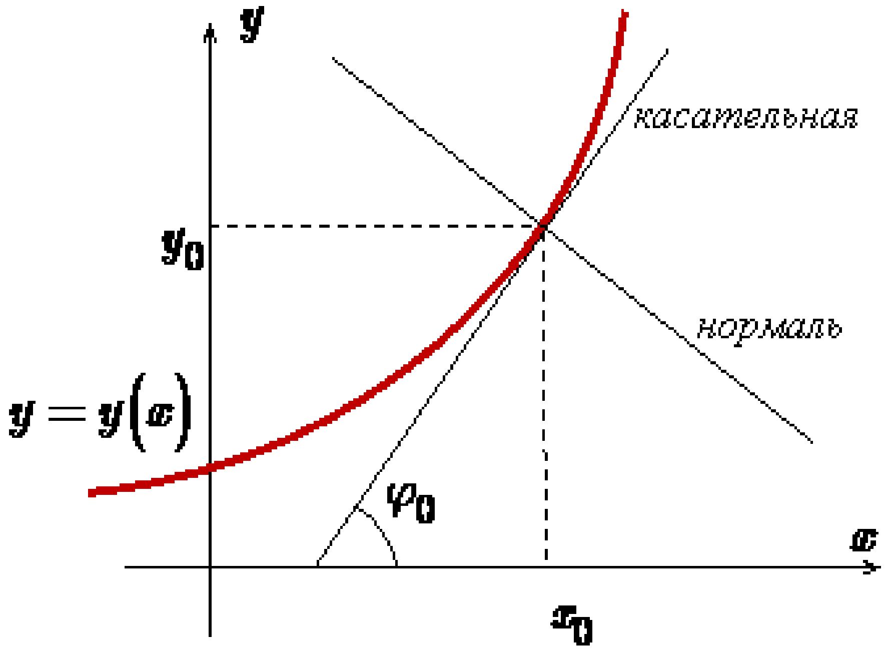
находим производную

$$y'_x(x) = \frac{(t\ln t)'}{\left(\dfrac{\ln t}{t}\right)'} = \frac{t'\cdot\ln t + t\cdot(\ln t)'}{\dfrac{(\ln t)'t - \ln t\cdot t'}{t^2}} = \frac{1\cdot\ln t + t\cdot\dfrac{1}{t}}{\dfrac{\dfrac{1}{t}\cdot t - \ln t\cdot 1}{t^2}} = \frac{t^2(\ln t + 1)}{1 - \ln t}.$$

$$t \in (0;e)\cup(e;+\infty).$$

Геометрический смысл производной

Пусть функция $y=y(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $y_0 = y(x_0)$, тогда значение производной функции в этой точке есть тангенс угла наклона φ_0 касательной, проведенной к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ к положительному направлению оси абсцисс.



Уравнение касательной к графику $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Нормалью к графику функции $y=y(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, перпендикулярная касательной к графику в этой точке.

Уравнение нормали имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Нахождение уравнений касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$

Пример 61.
Составить уравнение касательной к графику функции

$$y = 2\sqrt{x-2}$$

в точке $M(3; 2)$.

Решение. Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Найдем значение $f'(x)$ в точке $x_0 = 3$:

$$f'(x) = \left(2\sqrt{x-2}\right)' = 2\frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}}, \quad f'\left(3\right) = \frac{1}{\sqrt{3-2}} = 1.$$

Составим уравнение касательной

$$y - 2 = 1\cdot(x - 3) \text{ или } y = x - 1.$$

Уравнение нормали составим по формуле

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

$$y - 2 = -1\cdot(x - 3) \text{ или } y = 5 - x.$$

Нахождение уравнений касательной и нормали к кривой, заданной неявно

Пример 62.
Составить уравнение касательной к кривой $y = y(x)$, заданной неявно уравнением

$$y^2 - e^{xy} = 1$$

в точке $M\left(0; \sqrt{2}\right)$.

Решение. Уравнение касательной составим по формуле

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

уравнение нормали $$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Найдем производную $y'(x)$.

Продифференцируем обе части уравнения $y^2 - e^{xy} = 1,$ полагая, что $y=y(x)$ и выразим $y'(x)$: $\left(y^2 - e^{xy}\right)' = (1)'$

или

$$2yy' - e^{xy}(y + x \cdot y') = 0 \Rightarrow y'(2y - xe^{xy}) = ye^{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$$

Так как $y(0)=\sqrt{2}$ (определили из координат точки M), то

$$y'(0)=\frac{y(0)e^{0\cdot y(0)}}{2y(0)-0\cdot e^{0\cdot y(0)}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, уравнение касательной:

$$y-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(x-0) \quad \text{или} \quad y=\frac{x}{2}+\sqrt{2},$$

и уравнение нормали:

$$y-\sqrt{2}=-2(x-0) \quad \text{или} \quad y=\sqrt{2}-2x.$$

Нахождение уравнений касательной и нормали к кривым заданным параметрически

Пример 63. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \log_2(1+t^2) \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

в точке, соответствующей значению параметра $t_0 = 1.$

Решение. Уравнение касательной составим по формуле

$$y - y_0 = y'_x(x_0)(x - x_0),$$

уравнение нормали $$y - y_0 = -\frac{1}{y'_x(x_0)}(x - x_0).$$

Найдем значения $x_0 = x(t_0)$ и $y_0 = y(t_0)$:

$$x_0 = \log_2\left(1+1\right) = \log_2 2 = 1; \quad y_0 = \operatorname{arctg} 1 = \pi / 4.$$

Найдем производную

$$y'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}: \quad y'_x(x) = \frac{(\operatorname{arctg} t)'}{(\log_2(1+t^2))'} = \frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{(1+t^2)\ln 2}} = \frac{\ln 2}{2t}.$$

Значение производной в точке:

$$y'_x(x_0) = \left.\frac{\ln 2}{2t}\right|_{t_0=1} = \frac{\ln 2}{2} = \ln\sqrt{2}.$$

Таким образом, уравнение касательной:

$$y - \pi/4 = \ln\sqrt{2}(x-1) \quad \text{или} \quad y = x\ln\sqrt{2} + \pi/4 - \ln\sqrt{2},$$

уравнение нормали:

$$y - \pi/4 = -\frac{1}{\ln\sqrt{2}}(x-1) \quad \text{или} \quad y = \pi/4 - \frac{1}{\ln\sqrt{2}}(x-1).$$

Пример 64. Составить уравнения касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t^2 \cos t \end{cases} \quad \text{в точке } M\left(\pi, -\pi^2\right).$$

Уравнения составим по формулам для касательной

$$y - y_0 = y'_x(x_0)(x - x_0),$$

и для нормали

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_x(x_0)}(x - x_0).$$

Решение. Найдем производную $y'_x(x) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$

$$y'_x(x) = \frac{(t^2 \cos t)'}{(t(1-\sin t))'} = \frac{2t\cos t - t^2 \sin t}{1-\sin t - t\cos t}.$$

Для нахождения $y'_x(x_0)$, нужно знать, какому значению параметра t соответствует точка кривой $M(\pi; -\pi^2)$. Найдем значение параметра из системы:

$$\begin{cases} \pi = t_0(1-\sin t_0) \\ -\pi^2 = t_0^2 \cos t_0 \end{cases}.$$

Несложно определить, что $t_0 = \pi$, значит,

$$y'_x(x_0) = \left.\frac{2t\cos t - t^2\sin t}{1-\sin t - t\cos t}\right|_{t_0=\pi} = \frac{2\pi\cos\pi - \pi^2\sin\pi}{1-\sin\pi - \pi\cos\pi} = \frac{-2\pi}{1+\pi}.$$

Таким образом, уравнение касательной

$$y+\pi^2 = \frac{-2\pi}{1+\pi}(x-\pi) \quad \text{или} \quad y = \frac{-2\pi x}{1+\pi} - \pi^2 + \frac{2\pi^2}{1+\pi},$$

И уравнение нормали:

$$y+\pi^2 = \frac{1+\pi}{2\pi}(x-\pi) \quad \text{или} \quad y = \frac{1+\pi}{2\pi}x - \frac{1+\pi}{2} - \pi^2.$$

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 936, 938, 941, 943, 944, 828, 830, 838, 845, 854, 949, 964, 965

Домашнее задание

1. Решить задачу 16 типового расчета 2
2. Решить задачи из Бермана занятия 12, 13

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.