# Семинар 10

# Логарифмическое дифференцирование
# Производная функции, заданной неявно

## Логарифмическое дифференцирование

***Логарифмической производной*** функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$$(\ln(f(x)))'=f'(x)/f(x). \tag{1}$$

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют ***логарифмическим дифференцированием***.

Из равенства (1) получается выражение для производной функции $y=f(x)$:

$$f'(x)=f(x)\cdot(\ln(f(x)))'. \tag{2}$$

В некоторых случаях предварительное логарифмирование функции упрощает нахождение ее производной.

Например, логарифмическое дифференцирование позволяет найти производную степенно-показательной функции $y = u^v$,
где $u=u(x)$ и $v=v(x)$.

Тогда $\ln y = \ln u^v = v \ln u,$ $(\ln y)' = y'/y = (v \cdot \ln u)' = v' \cdot \ln u + v \cdot (\ln u)' = v' \cdot \ln u + v/u \cdot u'$
и

$$y' = u^v (v' \cdot \ln u + v / u \cdot u').$$

## Примеры нахождения производных

**Пример 52.** Найти производную функции

$$y = x^x.$$

**Решение.**

Применим формулу $f'(x)=f(x)\cdot(\ln(f(x)))'$:

$$y' = (x^x)' = x^x \cdot (\ln x^x)' = x^x \cdot (x \ln x)' =$$

$$= x^x \cdot (x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)') = x^x (1 \cdot \ln x + x \cdot 1/x) = x^x (\ln x + 1).$$

**Ответ.** $y' = x^x (\ln x + 1).$

**Пример 53**. Найти производную функции $y = \sin\left(x^{\cos x}\right)$.

**Решение.**

По формуле производной сложной функции

$$y' = \left(\sin\left(x^{\cos x}\right)\right)' = \cos\left(x^{\cos x}\right)\cdot\left(x^{\cos x}\right)'.$$

Для нахождения производной $\left(x^{\cos x}\right)'$ применим формулу $f'(x)=f(x)\cdot(\ln(f(x)))'$:

$$\left(x^{\cos x}\right)' = x^{\cos x}\cdot\left(\ln\left(x^{\cos x}\right)\right)' = x^{\cos x}\cdot(\cos x\cdot\ln x)' =$$

$$= x^{\cos x}\cdot((\cos x)'\cdot\ln x+\cos x\cdot(\ln x)') = x^{\cos x}\cdot(-\sin x\cdot\ln x+\cos x\cdot 1/x).$$

**Ответ.**

$$y' = \left(\sin\left(x^{\cos x}\right)\right)' = \cos\left(x^{\cos x}\right)\cdot x^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}\right).$$

**Пример 54.** Найти производную $y=\dfrac{\sqrt[5]{x+1}\cdot(x-3)^7}{(x+8)^3}$.

**Решение.**

Функция является дробью, с произведением степенных функций в числителе, поэтому для нахождения производной нужно воспользоваться формулами производной частного и произведения.

Когда функция является произведением большого числа множителей, удобнее для нахождения ее производной пользоваться формулой логарифмической производной $f'(x)=f(x)\cdot(\ln(f(x)))'$.

При нахождении $\ln y(x)$ применим свойства логарифмической функции

$$\ln\frac{ab}{c}=\ln a+\ln b-\ln c \quad \text{и} \quad \ln a^b=b\ln a:$$

$$\ln y=\ln\frac{\sqrt[5]{x+1}\cdot(x-3)^7}{(x+8)^3}=\ln\sqrt[5]{(x+1)}+\ln(x-3)^7-\ln(x+8)^3=\frac{1}{5}\ln(x+1)+7\ln(x-3)-3\ln(x+8).$$

Искомую производную легко найдем, применяя формулы производной суммы и логарифмической функции:

$$y' = y\cdot(\ln y)' = \frac{\sqrt[5]{x+1}\cdot\left(x-3\right)^{7}}{\left(x+8\right)^{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\ln\left(x+1\right)+7\ln(x-3)-3\ln(x+8)\right)' =$$

$$= \frac{\sqrt[5]{x+1}\cdot\left(x-3\right)^{7}}{\left(x+8\right)^{3}}\cdot\left(\frac{1}{5\cdot\left(x+1\right)}+\frac{7}{x-3}-\frac{3}{x+8}\right).$$

**Ответ.**

$$y' = \frac{\sqrt[5]{x+1}\cdot\left(x-3\right)^{7}}{\left(x+8\right)^{3}}\cdot\left(\frac{1}{5\cdot\left(x+1\right)}+\frac{7}{x-3}-\frac{3}{x+8}\right).$$

## Производная функции, заданной неявно

Говорят, что функция $y=f(x)$, $x\in(a;b)$, неявно задана уравнением $F(x, y)=0$, если для всех $x\in(a;b)$

$$F(x, f(x))=0. \qquad (*)$$

Для нахождения производной функции $y=f(x)$ следует тождество (*) продифференцировать по $x$ (рассматривая левую часть как сложную функцию переменной $x$ ), а затем полученное уравнение разрешить относительно $f'(x)$:

$$y'(x)= f'(x)= \varphi(x, y). \qquad (**)$$

Для вычисления значения производной в точке $x=x_0$, нужно знать значение $y_0=y(x_0)$ или определить его (если возможно) из уравнения (*). Подставляя $x_0$ и $y_0$ в (**), получают искомое значение

$$y'(x_0)=\varphi(x_0,y_0).$$

## Примеры нахождения производных

**Пример 55.** Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ неявно определяет на интервале $(-1; 1)$ две функции

$$y_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{и} \quad y_2(x) = -\sqrt{1-x^2}. \tag{1}$$

Производные этих функций:

$$y'_1(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad y'_2(x) = \left(-\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2}$$

Найдем производную функции $y(x)$, не выражая явно зависимость $y$ от $x$ из уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

Дифференцируем обе части уравнения, помня, что $y$ – функция от переменной $x$ и применяя правило дифференцирования сложных функций:

$$\left(x^2 + y^2\right)' = 1' \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}. \tag{3}$$

Подставляя в полученное равенство явные выражения (1) для *y*, получим выражения для производных (2).
Если требуется вычислить значение производной в точке $x_0 = 1/\sqrt{2}$, для $y_0 = -1/\sqrt{2}$ то, подставляя $x_0$ и $y_0$ в (3), получим искомое значение:

$$y'\left(1/\sqrt{2}\right) = -\frac{1/\sqrt{2}}{-1/\sqrt{2}} = 1.$$

**Пример 56.** Найти значение $y'(x)$ в точке $x=1$, если

$$x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0,\quad y(1)=1.$$

**Решение.**

Продифференцируем уравнение $x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0,$ при этом производную от слагаемого $x^2y^2$ найдем по формуле производной произведения

$$\left(x^2y^2\right)'=\left(x^2\right)'\cdot y^2+x^2\cdot\left(y^2\right)'=2x\cdot y^2+x^2\cdot\left(y^2\right)',$$

а производную функции $y^2$ – по формуле производной сложной функции

$$\left(y^2\right)'=2y\cdot y'.$$

Таким образом:

$$\left(x^3-2x^2y^2+5x+y-5\right)'=0\;\Rightarrow\;3x^2-2(2x\cdot y^2+x^2\cdot 2y\cdot y')+5+y'=0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-4xy^2-4x^2yy'+y'=-5.$$

Разрешим последнее уравнение относительно $y'$:

$$-4x^2yy' + y' = -5 - 3x^2 + 4xy^2 \;\Rightarrow\; y'(1 - 4x^2y) = 4xy^2 - 3x^2 - 5 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y' = \frac{4xy^2 - 3x^2 - 5}{1 - 4x^2y}.$$

Подставляя в полученное выражение $x=1,\ y=1$, найдем искомое значение.

**Ответ.** $$y'(1) = \frac{4\cdot1\cdot1^2 - 3\cdot1^2 - 5}{1 - 4\cdot1^2\cdot1} = \frac{4}{3}.$$

**Пример 57.** Найти $y'(x)$, если $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

**Решение.**

Продифференцируем уравнение $2^x + 2^y = 2^{x+y}$, помня, что $y$=$y$($x$) и, применяя формулу для производной сложной функции:

$$\left(2^x + 2^y\right)' = \left(2^{x+y}\right)' \Rightarrow \left(2^x\right)' + \left(2^y\right)' = \left(2^{x+y}\right)' \Rightarrow 2^x \ln 2 + 2^y \ln 2 \cdot y' = 2^{x+y} \ln 2 \cdot (x' + y') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \ln 2 + 2^y \ln 2 \cdot y' = 2^{x+y} \ln 2 + 2^{x+y} \ln 2 \cdot y'.$$

Полученное равенство разрешим относительно $y'$:

$$2^y \ln 2 \cdot y' - 2^{x+y} \ln 2 \cdot y' = 2^{x+y} \ln 2 - 2^x \ln 2 \Rightarrow y'\left(2^y - 2^{x+y}\right)\ln 2 = \left(2^{x+y} - 2^x\right)\ln 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2^{x+y} - 2^x}{2^y - 2^{x+y}}.$$

Из исходного уравнения $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ выразим числитель и знаменатель полученной дроби:

$$2^x = 2^{x+y} - 2^y, \quad 2^y = 2^{x+y} - 2^x.$$

Таким образом,

$$y' = \frac{2^{x+y} - 2^{x+y} + 2^y}{2^{x+y} - 2^x - 2^{x+y}} = \frac{2^y}{-2^x}.$$

**Ответ.**

$$y' = -2^{y-x}.$$

## Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 577, 595, 609, 621, 625, 654, 656, 658, 732, 793, 796, 800, 802, 804, 811

# Домашнее задание

1. Решить задачи 15, 17 типового расчета 2
2. Решить задачи из Бермана занятия 11, 12

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.