Семинар 9

Модуль 2

Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

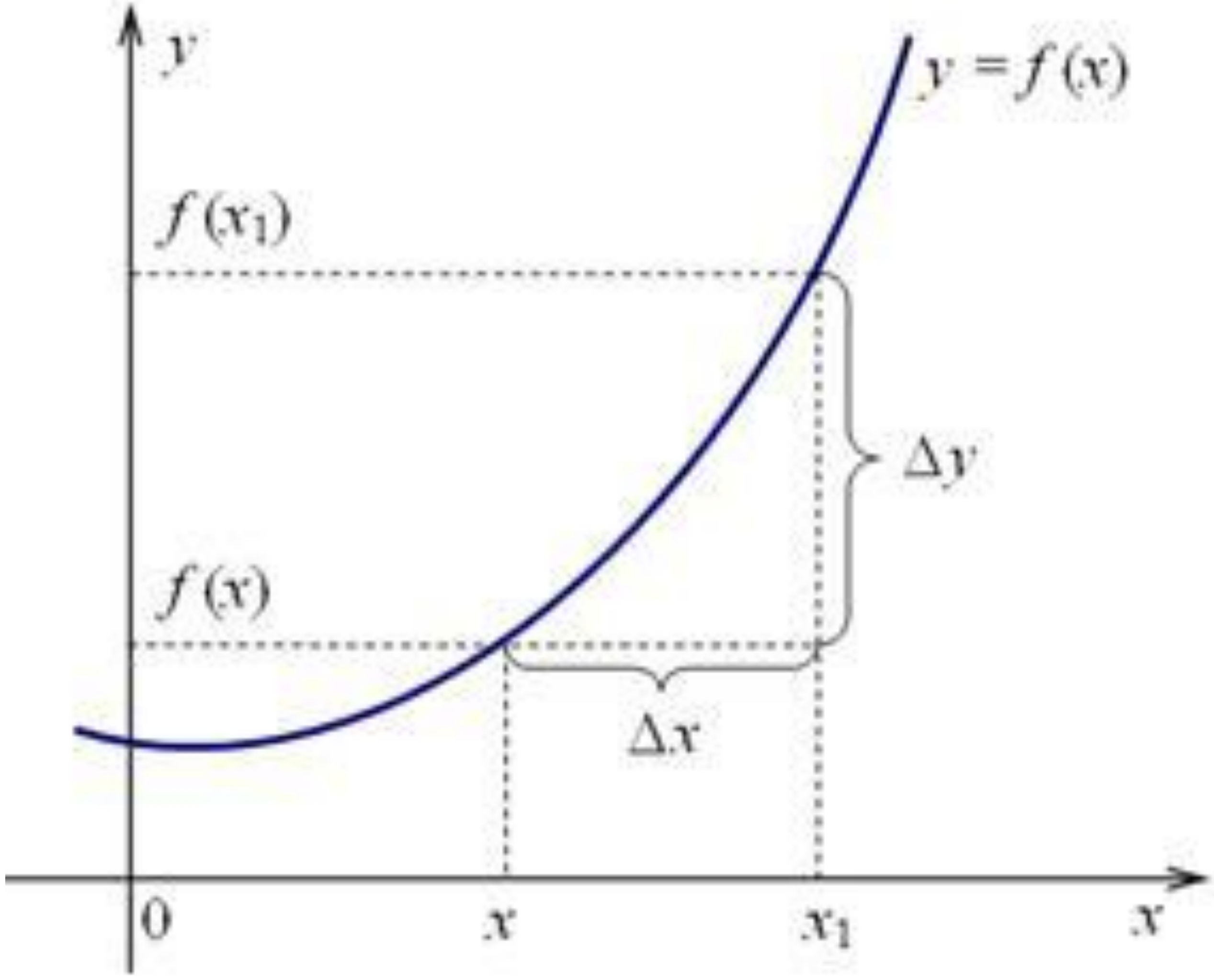
Производная. Формулы и правила дифференцирования. Производная сложной функции

Производная функции
Определение производной

Если x и x_1 значения аргумента x, а $y=f(x)$ и $y_1 = f(x_1)$ – соответствующие значения функции $y=f(x)$,
то $\Delta x = x_1 - x$ называется ***приращением аргумента*** x на отрезке $[x, x_1]$, а $\Delta y = y_1 - y$ или

$$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

приращением функции y на том же отрезке $[x, x_1]$.



y
y = f (x)
f (x1)
Δy
f (x)
Δx
0
x
x1
x

Определение. Производной y' функции $y=f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Нахождение производной $y'(x)$ называют дифференцированием функции $y=f\,(x)$.

Пример нахождения производной по определению

Рассмотрим, как найти производную функции, используя определение.

Пусть дана функция $y = x^2$, так как $\Delta x = x_1 - x$, а $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, получаем

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2.$$

По определению,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right) = 2x.$$

Таким образом, для функции $y = x^2$, производная $y'=2x$.

Заметим, что зная выражение для производной $y' = f'(x)$, можно посчитать значение производной в конкретно заданной точке $x = x_0$.

В нашем примере

при $x_0 = 0$ производная $y'(0) = 2x\big|_{x=0} = 0;$

при $x_0 = 2$ производная $y'(2) = 2x\big|_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4;$

при $x_0 = -1$ производная $y'(-1) = 2x\big|_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2$

и т.д.

Вычисление производной по определению громоздко и трудоемко. На практике нахождение производных упрощается с использованием следующих правил дифференцирования, свойств производной и таблицы производных элементарных функций.

Основные правила нахождения производной

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ функции, имеющие производные, C – постоянная.

1) $C'=0$;

2) $(C\cdot u)'=C\cdot u'$;

3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

4) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$;

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Таблица производных основных элементарных функций

Степенная функция: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;

частные случаи: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Показательная функция: $(a^x)' = a^x \ln a$;

частный случай: $(e^x)' = e^x$.

Логарифмическая функция: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$;

частный случай: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Таблица производных основных элементарных функций (продолжение)

Тригонометрические функции:

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Обратные тригонометрические функции:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Примеры нахождения производных

Пример 47. Вычислить производную функции

$$y = 6x^2 - 7x - 9.$$

Решение. Функция является суммой трех функций, для вычисления производной воспользуемся правилами

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad C' = 0, \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$$

и формулой дифференцирования степенной функции

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}:$$

$$y' = (6x^2)' - (7x)' - 9' = 6(x^2)' - 7 \cdot x' - 0 =$$

$$= 6 \cdot 2x - 7 \cdot 1 = 12x - 7.$$

Пример 48. Найти производную функции

$$y = x^3 \cdot \sin x.$$

Решение. Данная функция является произведением степенной функции и тригонометрической, поэтому для нахождения производной воспользуемся правилом дифференцирования произведения $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ и формулами производных $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ и $(\sin x)' = \cos x$:

$$y' = (x^3 \cdot \sin x)' = (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' =$$

$$= 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x = x^2 (3 \sin x + x \cdot \cos x).$$

Пример 49. Найти производную функции

$$y = \frac{2-3x}{1+x}.$$

Решение. Данная функция является рациональной дробью, поэтому для нахождения производной воспользуемся правилом дифференцирования частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad v \neq 0:$$

$$y' = \left(\frac{2-3x}{1+x}\right)' = \frac{(2-3x)' \cdot (1+x) - (2-3x) \cdot (1+x)'}{(1+x)^2}$$

так как по правилам и формулам дифференцирования

$(2-3x)'=2'-(3x)'=0-3\cdot x'=-3\cdot 1=-3;$

$(1+x)'=1'+x'=0+1=1,$

то

$$y'=\frac{-3\cdot(1+x)-(2-3x)\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{-3-3x-2+3x}{(1+x)^2}=-\frac{5}{(1+x)^2}.$$

Производная сложной функции

Пусть

1) функция $u=\varphi(x)$ имеет в некоторой точке x_0 производную $u_x' = \varphi_x'(x_0)$,

2) функция $y=f(u)$ имеет в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$ производную $y_u' = f_u'(u_0)$.

Тогда сложная функция $y=f(\varphi(x))$ также будет иметь производную в точке x_0, равную произведению производных функций $f(u)$ и $\varphi(x)$:

$$[f(\varphi(x))]' = f_u{}'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi_x{}'(x_0),$$

или, короче, $y_x{}' = y_u{}' \cdot u_x{}'$.

Таблица производных сложных функций

Пусть $u(x)$ – некоторая дифференцируемая функция, тогда верны следующие равенства:

1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$;

частные случаи: $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$; $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;

2. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;

3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;

5. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

12. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Нахождение производных сложных функций

Пример 50. Найти производную функции $y=\ln(\sin x)$.

Решение. Обозначим $y(u)=\ln u$, $u(x)=\sin x$, тогда функция $y=\ln(\sin x)=\ln u$.

Найдем производную по правилу дифференцирования сложной функции $y_x' = y_u' \cdot u_x'$.

Так как

$$y_u' = (\ln u)' = \frac{1}{u},$$

а $u_x' = (\sin x)' = \cos x,$

то

$$y_x' = y_u' \cdot u_x' = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

В отдельном выписывании составляющих сложной функции нет надобности, и производные сложных функций находят последовательным дифференцированием:

$$y' = (\ln(\sin x))' = \left(\ln(\sin x)\right)' \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Пример 51. Найти производную функции

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Решение. Обозначим $y(u)=\sqrt{u}$, $u(x)=1-x^2$, тогда

$$y=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{u}.$$

Найдем производную по правилу дифференцирования сложной функции $y_x{}'=y_u{}'\cdot u_x{}'$.

Так как

$$y_u{}'=(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}},\ \ u_x{}'=(1-x^2)'=1'-(x^2)'=0-2x=-2x,$$

то

$$y_x{}'=y_u{}'\cdot u_x{}'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(-2x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Опуская промежуточные обозначения, запишем кратко процесс нахождения производной:

$$y' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' \cdot \left(1-x^2\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 466(6,12,13), 492, 498(10), 509, 523, 545, 560, 566

Домашнее задание

1. Решить задачу 14 типового расчета 2
2. Решить задачи из Бермана занятие 10

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.