Семинар 8

Непрерывность функций

Функция $y=f(x)$ ***непрерывна*** в точке $x = x_0$, если одновременно выполняются три условия:

1) функция в точке $x = x_0$ определена;
2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) значения функции и предела равны между собой:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Точка $x = x_0$ называется ***изолированной точкой разрыва*** функции $y=f(x)$, если в точке $x = x_0$ функция не является непрерывной, а во всех точках x, удовлетворяющих условиям $x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \delta$ при некотором $\delta>0$, функция непрерывна.

Правым пределом функции $y=f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел, взятый на множестве $x > x_0$.

Обозначается: $$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+0} f(x).$$

Аналогично определяется ***левый предел*** функции $y=f(x)$ в точке $x = x_0$:

$$f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Справедливо утверждение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

существует в том и только в том случае, если существуют равные между собой односторонние конечные пределы.

В этом случае справедливы равенства:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0+) = f(x_0-).$$

Изолированная точка разрыва $x = x_0$ называется ***точкой разрыва первого рода***, если существуют конечные левый и правый пределы функции в этой точке.

Все остальные – ***точки разрыва второго рода***.

Точка разрыва первого рода называется ***устранимой особой точкой***, если $f(x_0+) = f(x_0-)$.

В этом случае функцию можно ***доопределить до непрерывности*** – положив по определению

$$f(x_0) = f(x_0+) = f(x_0-).$$

Справедливо утверждение: ***элементарные функции непрерывны в области определения***.

Поэтому разрывы элементарных функций надо искать там, где они не определены.

Исследование на непрерывность

Пример 44.

Найти и проклассифицировать точки разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -\infty < x < -1, \\ x^2, & -1 \le x \le 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

Решение. Возможные точки разрыва: $x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$ Во всех остальных точках функция непрерывна как однозначно заданная элементарная.

Посчитаем односторонние пределы.

$$f\left(-1-\right) = \lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} (x+1) = -1+1 = 0,$$

$$f\left(-1+\right) = \lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} x^2 = \left(-1\right)^2 = 1.$$

Видим, что конечные односторонние пределы существуют, но не равны между собой.

Ответ. $x_1 = -1$ - неустранимая точка разрыва 1-го рода.

$$f\left(1-\right) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} x^2 = 1^2 = 1,$$

$$f\left(1+\right) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} x = 1.$$

Видим, что $f(1+) = f(1-)$, и в точке функция определена, поэтому $x_2 = 1$ - точка непрерывности.

Пример 45.

Найти и проклассифицировать точки разрыва функции

$$f(x) = 5^{1/x}.$$

Решение. Точка разрыва $x=0$, так как при этом значении x функция не определена. Поскольку $1/0=\pm\infty$, нам остается только определить знак функции $y=1/x$ в окрестности $x=0$, что нетрудно сделать методом интервалов. Таким образом,

$$f(0-)=\lim_{x\to 0-0} 5^{1/x}=5^{-\infty}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\infty}=0,$$

$$f(0+)=\lim_{x\to 0+0} 5^{1/x}=5^{\infty}=\infty.$$

Ответ. $x=0$ является точкой разрыва 2-го рода (предел справа не является конечным).

Пример 46.
Найти и проклассифицировать точки разрыва функции

$$f(x) = 2^{\frac{-x}{(x-1)^2(x+2)}}.$$

Решение. Точки разрыва $x_1 = -2, \; x_2 = 1.$

Исследовав методом интервалов знаки функции

$$y = \frac{-x}{(x-1)^2(x+2)},$$

получим:

$y<0$ при $x<-2$,

$y>0$ при $-2<x<0$,

$y<0$ вблизи точки $x=1$

(знак выражения при переходе через $x=1$ не меняется).

Поэтому:

$$f(-2-) = \lim_{x\to -2-0} 2^{\frac{-x}{(x-1)^2(x+2)}} = 2^{-\infty} = 0,$$

$$f(-2+) = \lim_{x\to -2+0} 2^{\frac{-x}{(x-1)^2(x+2)}} = 2^{\infty} = \infty.$$

Ответ. $x_1 = -2$ является точкой разрыва 2-го рода.

$$f(1-) = f(1+) = \lim_{x\to 1} 2^{\frac{-x}{(x-1)^2(x+2)}} = 2^{-\infty} = 0.$$

$x_2 = 1$ является устранимой точкой разрыва 1-го рода. Мы можем по определению положить $f(1)=0$.

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 223, 225, 227, 228, 233

Домашнее задание

1. Решить задачи 12, 13 типового расчета 1
2. Решить задачи из Бермана занятие 8

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.