Семинар 7

Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие.

Сравнение бесконечно малых

Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие. Применение эквивалентностей для вычисления пределов

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые в окрестности точки x_0.

Будем называть их ***эквивалентными***, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Обозначается: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Пусть $x \to 0$, тогда :

1. $\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x;$
2. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2};$
3. $e^x - 1 \sim x;$
4. $\ln(1+x) \sim x;$
5. $(1+x)^p - 1 \sim px.$

Или, в общем виде, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)=0$, то в

окрестности точки x_0 выполняются эквивалентности:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
2. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;
3. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$;
4. $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
5. $(1+\alpha(x))^p-1 \sim p\cdot\alpha(x)$.

Смысл вышеприведенных эквивалентностей в замене функции более сложной природы степенной функцией.

Примеры эквивалентных функций

$\ln(1+2x) \sim 2x$ при $x \to 0$;

$\arcsin(x-1)^2 \sim (x-1)^2$ при $x \to 1$, так как $(x-1) \to 0$ при $x \to 1$;

$$1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2} \sim \frac{x}{2}$$

при $x \to 0$ $(x \geq 0)$, так как $\sqrt{x} \to 0$ при $x \to 0$;

Пример 36.

Найти многочлен, эквивалентный $\sin x$ при $x \to \pi$.

Решение. Поскольку $\sin x = \sin(\pi - x)$

(формула приведения) и $\lim\limits_{x \to \pi} (\pi - x) = 0,$ имеем

$$\sin x = \sin(\pi - x) \sim \pi - x \text{ при } x \to \pi.$$

Пример 37.
Найти многочлен, эквивалентный $\ln 2x$ при $x \to \dfrac{1}{2}$.

Решение. $\ln 2x = \ln\left(1 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \sim 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1,$

так как $\alpha(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \to 0$ при $x \to \frac{1}{2}.$

Применение эквивалентных функций при вычислении пределов

Если $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ и $\beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ при $x \to x_0$,
и существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)} = A,$$

то существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

и этот предел равен A.

Иначе говоря,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)},$$

т.е. в пределе бесконечно малые можно заменить на эквивалентные.

Вычисление пределов с помощью эквивалентностей

Пример 38. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}.$$

Решение. Так как $\ln(1+2x) \sim 2x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$$

Пример 39. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)^2}{x^2-1}.$$

Решение. Так как $\arcsin(x-1)^2 \sim (x-1)^2$ при $x \to 1$, то

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arcsin(x-1)^2}{x^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x+1)} = 0.$$

Пример 40. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin x}.$$

Решение. При подстановке предельного значения

получаем неопределенность $\left(1^{\infty}\right)$.

Проведем цепочку преобразований:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/\sin x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(1-\left(1-\cos x\right)\right)}{\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(1-x^2/2\right)}{\sin x}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{-x^2}{2x}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{-x}{2}}=e^0=1.$$

Пример 41. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2}.$$

Решение. При подстановке предельного значения в числитель и знаменатель дроби получим неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Введем новую переменную $x-\pi/2=t$. $t\to 0$ при $x\to\pi/2$.

Так как $x=t+\pi/2$, то $\sin x=\sin(t+\pi/2)=\cos t$, а знаменатель дроби $2x-\pi=2(t+\pi/2)-\pi=2t$, и предел принимает вид:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{(2t)^2}=$$

$$=\left|1-\cos t \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t^2/2}{4t^2}=\frac{1}{8}.$$

Сравнение бесконечно малых

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$ то $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка малости*** чем $\beta(x)$.

Обозначается $\alpha(x)=o(\beta(x))$ (o-малое относительно $\beta(x)$).

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\text{const}$, то величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$

называются ***бесконечно малыми одного порядка малости***. Обозначается $\alpha(x)=O(\beta(x))$ (O-большое относительно $\beta(x)$).

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются

эквивалентными бесконечно малыми при $x\to x_0$. Обозначается $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$, т.е. эквивалентные бесконечно малые – частный случай бесконечно малых одного порядка.

Примеры сравнения бесконечно малых

Пример 42. Сравнить бесконечно малые

$\alpha(x)=\sin 4x$ и $\beta(x)=-2x^2$ при $x\to 0$.

Решение. Поскольку

$\alpha(x)=\sin 4x \sim 4x$ - бесконечно малая первого порядка,

$\beta(x)=-2x^2$ - бесконечно малая второго порядка,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{4}=0$$

и $\beta(x)$ малая более высокого порядка малости, чем $\alpha(x)$.

$$\beta(x)=o(\alpha(x)).$$

Пример 43. Сравнить бесконечно малые

$$\alpha(x) = x - \sqrt{x} \quad \text{и} \quad \beta(x) = x^3 - 1$$

при $x \to 1$.

Решение. Найдем предел отношения бесконечно малых величин:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x^2+x+1)}=\left|\begin{matrix}x=1+y\\ y\to0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\lim_{y\to0}\frac{y+1-\sqrt{1+y}}{y}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{y\to0}\frac{y-\left(\sqrt{1+y}-1\right)}{y}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{y\to0}\frac{y-y/2}{y}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Предел равен конечному числу, следовательно, величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые одного порядка малости в окрестности x=1.

Здесь использована эквивалентность

$$\sqrt{1+y}-1\sim\frac{y}{2}.$$

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 210 (1,4), 405, 407, 414 (2, 5, 10)

Домашнее задание

1. Решить задачу 11 типового расчета 1
2. Решить задачи из Бермана занятие 7

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.