Семинар 6

Замечательные пределы функций

Первый замечательный предел

Первым замечательным пределом называют предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Этот предел раскрывает неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и носит название замечательного, потому что вместе со вторым замечательным пределом (будет позже) позволяет вычислить пределы элементарных функций.

Как следствия первого замечательного предела можно указать:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Применение первого замечательного предела

Пример 27. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}.$$

Смысл действий – подведение под первый замечательный предел с помощью домножения и деления на подходящие выражения.

Заметим, что прежде чем применять первый замечательный предел, надо добиться того, чтобы под знаком синуса и в знаменателе стояла одна и та же бесконечно малая функция.

Так, у нас

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\left|\begin{array}{c} y=5x \\ y\to 0 \quad \text{при} \quad x\to 0 \end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

Аналогично,

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\left|\begin{array}{c} y=3x \\ y\to 0 \quad \text{при} \quad x\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример 28. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 4x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 4x}=\left(\frac{1-1}{0}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

Пример 29. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right).$$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)=\left(\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}\right)=(\infty-\infty).$

Раскроем эту неопределенность приведением к общему знаменателю.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Применим известную формулу

$$1-\cos x=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$$

На последнем этапе нам удалось, применив формулу синуса двойного угла, обойтись без первого замечательного предела.

Пример 30. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=$$

$$=1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Пример 31. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x-\pi/3)}{\frac{1}{2}-\cos x}.$$

Решение. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{\dfrac{1}{2}-\cos x}=\dfrac{\sin 0}{\dfrac{1}{2}-\cos\dfrac{\pi}{3}}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$

Раскроем неопределенность с помощью замены переменных.

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x-\pi/3)}{1/2-\cos x}=\left|\begin{array}{c} x=y+\pi/3 \\ y\to 0 \quad \text{при} \quad x\to\pi/3 \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y+\pi/3-\pi/3)}{1/2-\cos(y+\pi/3)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{1/2-(\cos y\cos\pi/3-\sin y\sin\pi/3)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{1}{2}\left(1-\cos y\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sin^2\frac{y}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin^2\frac{y}{2}}{\sin y}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\dfrac{\sin^2 \dfrac{y}{2}}{2\sin\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{y}{2}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называют предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

где $e \approx 2{,}718281828\ldots$

Другие формы записи второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a, \quad \text{где } \ a = \text{const},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x}=e,\quad \lim_{x\to 0}\left(1+ax\right)^{1/x}=e^{a},$$

где a=const.

Этот предел раскрывает неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$ и носит название замечательного, потому что вместе с первым замечательным пределом позволяет вычислить пределы элементарных функций.

Применение второго замечательного предела

Пример 32. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}.$$

Решение. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{x-1}-1\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x}.$$

Мы уже фактически свели наш пример ко второму замечательному пределу.

Заметим, что прием «добавить и отнять единицу» является общим в таких примерах.

Сделаем замену переменных.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x = \left|\begin{array}{c} x-1=y \\ x=y+1 \\ y\to\infty \quad \text{при} \quad x\to\infty \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} \cdot \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Пример 33. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{-x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{-x}=\left(1^{\infty}\right)^{-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-2}{3x+5}-1\right)^{-x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-2-3x-5}{3x+5}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3x+5}\right)^{-x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-7}{3x+5}\right)^{-\frac{3x+5}{7}}\right)^{\frac{-7(-x)}{3x+5}}=e^{7/3}.$$

Пример 34. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{5x+3}\right)^{-2x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{5x+3}\right)^{-2x}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-\infty}=\left(\frac{5}{3}\right)^{\infty}=\infty.$$

Таким образом, этот пример не имеет отношения ко второму замечательному пределу.

Пример 35. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+x)-\ln 2}{x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+x)-\ln 2}{x}=\left(\frac{\ln 2-\ln 2}{0}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/x}=\ln e^{1/2}=\frac{1}{2}.$$

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 314, 317, 322, 328, 330, 331, 351, 356, 367, 371, 389

Домашнее задание

1. Решить задачи 9, 10 типового расчета 1
2. Решить задачи из Бермана занятие 6

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.