Семинар 5

Предел функции в точке и на бесконечности, определения.

Предел дробно-рациональных и иррациональных функций

Предел функции в точке

Число A называется ***пределом функции*** $f\,(x)$ в окрестности точки $x=a$, если для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ будет справедливо неравенство $|f\,(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначение: $$A=\lim_{x\to a} f\,(x).$$

Справедливы общие свойства предела функции, аналогичные свойствам предела последовательности:

1) Если предел существует, то он единственен.

Т.е., если $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, то $A=B$;

Пусть существуют пределы $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Тогда:

2) $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B;$

3) $\exists \lim\limits_{x\to a}(C \cdot f(x)) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = C \cdot A,$ где $C = \text{const};$

4) $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)=A\cdot B;$

5)
$$\exists \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B},$$

если $g(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки $x=a$, и $B\neq 0$;

6) если $f(x)\leq g(x)$ в некоторой окрестности точки $x=a$, то

$$A=\lim_{x\to a} f(x)\leq \lim_{x\to a} g(x)=B;$$

7) если для функций $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$ в некоторой окрестности точки $x=a$ выполнены неравенства $f(x) \le h(x) \le g(x)$, при этом

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A,$$

то

$$\exists \lim_{x\to a} h(x) = A$$

- лемма о двух милиционерах.

Будем называть функцию $y=f(x)$ ***бесконечно большой в окрестности точки*** $x=a$, если для любого (сколь угодно большого) $A>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех x таких, что $|x-a|<\delta$, выполнено неравенство $f(x)>A$.

Будем использовать для этого случая запись

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

Аналогично можно определить $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\left|f(x)\right|=\infty.$

Функция $y=f(x)$ ***называется бесконечно малой в окрестности точки*** $x=a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0.$

Существует очень простая связь между бесконечно большими и бесконечно малыми:

1) если $y=f(x)$, бесконечно большая в окрестности точки $x=a$, то $y=1/f(x)$ - бесконечно малая в окрестности точки $x=a$;

2) если $y=f(x)$ бесконечно малая в окрестности точки $x=a$, то $y=1/|f(x)|$ - бесконечно большая в окрестности точки $x=a$.

При решении задач эти свойства можно использовать в следующей форме:

$$\frac{a}{0} = \pm\infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0,$$

где a - ненулевая константа.

Нахождение предела функций

Пример 21. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+6}.$$

Решение. При решении задач на нахождение предела функции прежде всего надо подставить вместо *x* его предельное значение.

Если функция в этой точке существует, то ответом будет ее значение.

Если же это не так, возникает задача – раскрыть неопределенность.

В нашем случае

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+6}=\frac{4+6+2}{4+2+6}=\frac{12}{12}=1.$$

Замечание. В наших примерах будут встречаться неопределенности вида:

$$\left(\frac{0}{0}\right),\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right),\ (\infty-\infty).$$

Будем записывать их в скобках, так как иначе эти выражения смысла не имеют.

Более сложные неопределенности будем вводить по мере изучения.

Пример 22. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}.$$

Решение. Подставив предельное значение, получим

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \left(\frac{4 - 6 + 2}{4 + 2 - 6} \right) = \left(\frac{0}{0} \right)$$

- неопределенность вида $\left(\frac{0}{0} \right)$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.
Уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$ имеет корни $x_1 = 1,\ x_2 = 2.$
Уравнение $x^2 + x - 6 = 0$ имеет корни $x_1 = -3,\ x_2 = 2.$

Поэтому

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x+3)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+3}=\frac{2-1}{2+3}=\frac{1}{5}.$$

Пример 23. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left(\dfrac{\sqrt{1+0}-1}{0}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

При раскрытии неопределенности в этом примере использован прием домножения числителя и одновременно знаменателя на сопряженное к числителю с последующим применением формулы «разность квадратов».

Пример 24. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right).$$

Решение. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=\left(\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}\right)=(\infty-\infty).$

Это пример новой неопределенности: $(\infty-\infty)$. Заменим ее другой неопределенностью путем приведения к общему знаменателю.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}.$$

Предел функции на бесконечности

Будем называть число A пределом функции $y=f(x)$ на бесконечности (обозначается $A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$),

если для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x > M$ будет справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Аналогично можно определить $B=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ - предел на минус бесконечности.

Все свойства предела функции в точке, в том числе понятия бесконечно больших и бесконечно малых, переносятся на предел функции при x равном плюс-минус бесконечности.

Нахождение предела функций

Пример 25. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+3x+1}{4x^3+2x^2-x+2}.$$

Решение. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+3x+1}{4x^3+2x^2-x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

В данном конкретном случае предел можно брать так же как и для многочленов от степени n, потому что здесь нет принципиальной разницы между дискретной переменной (n) и непрерывной (x).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+3x+1}{4x^3+2x^2-x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left(\text{ч}=3=\text{з}=3\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Случай равных степеней – отношение старших коэффициентов.

Пример 26. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right).$$

Решение. В этом примере неопределенность вида (∞–∞). Раскроем ее путем домножения на сопряженное.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=\left(\infty-\infty\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right)}{\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + ax + bx + ab - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(a+b)x + ab}{\sqrt{x^2 + ax + bx + ab} + x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left(\text{ч} = 1 = \text{з} = 1\right) = \frac{a+b}{2}.$$

Ответ получен по правилу «отношение старших коэффициентов».

В самом деле, в знаменателе старшая степень – первая, как и в числителе, поскольку x^2 стоит под корнем квадратным.

Этот пример показывает, что неопределенность $(\infty-\infty)$ может дать в ответе любое число.

В самом деле, меняя значения параметров a и b, мы можем получить любое значение выражения $\dfrac{a+b}{2}$.

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 269, 273, 277, 281, 284, 295, 297, 299, 303, 307

Домашнее задание

1. Решить задачи 6, 7, 8 типового расчета 1
2. Решить задачи из Бермана занятие 5

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.