Семинар 4

Пределы последовательностей

Предел последовательности многочленов

Последовательностью называется вещественнозначная функция натурального аргумента $a\colon\ N \to R$.

Значение функции $a(n)$ принято обозначать через a_n и называть n -м членом последовательности.

Через $\{a_n\}$ будем обозначать последовательность чисел a_n .

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{a_n\}$, если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдется такой номер n_0, что для всех номеров n, больших или равных n_0, выполнено неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

В компактном символическом виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся*** (говорят, что последовательность сходится).

В противном случае (если предела нет), последовательность называют ***расходящейся***.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует число A такое, что для всех n выполнено неравенство $|a_n|<A$.

Простейшие свойства предела

1) Если предел существует, то он единственен.

То есть, если $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то $a=b$.

2) Предел постоянной величины равен этой величине.

То есть, если $a_n = C$ для всех n, где C=const - постоянная величина, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} C = C.$$

3) Если последовательность сходится, то она ограничена.

Основные свойства предела

Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, при этом $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Тогда:

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$

2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (C \cdot a_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = C \cdot a,$ где $C = \text{const};$

3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b;$

4) $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad \text{если } b_n \neq 0,\ b \neq 0;$$

5) если $a_n \leq b_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

6) если для последовательности $\{c_n\}$ при всех n выполнены неравенства $a_n \leq c_n \leq b_n$, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

- лемма о двух милиционерах.

Будем называть последовательность ***неограниченно возрастающей*** (***бесконечно большой***), если для любого (сколь угодно большого) $A>0$ существует номер n_0 такой, что для всех номеров $n \geq n_0$ выполнено неравенство $a_n > A$.

Будем использовать для этого случая запись $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, помня при этом, что имеем дело с ***расходящейся последовательностью***, так как иначе она была бы ограниченной. Аналогично можно определить

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty .$$

Заметим, что определение предела не является конструктивным, то есть оно не дает способа вычислить предел, даже если он существует.

Поэтому на практике все сводится к некоторым стандартным известным случаям.

Рассмотрим некоторые из них.

Утверждение 1. Можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

Отсюда следует, что для любого $k\in N$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{n}}=0$$

Нахождение предела отношения многочленов

Пример 16. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{2n^2+3n-1}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{2n^2+3n-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{3-0+0}{2+0-0}=\frac{3}{2}.$$

При решении использованы основные свойства предела и утверждение 1.

Анализ решения первого примера позволяет сформулировать и доказать:

Утверждение 2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если } m > k, \\ \dfrac{a_m}{b_k}, & \text{если } m = k, \\ 0, & \text{если } m < k. \end{cases}$$

Пример 17. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-n^3}{2n^2+n-1}.$$

Решение. Воспользовавшись известной формулой «куб суммы» и утверждением 2, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-n^3}{2n^2+n-1}=\left(\infty-\infty\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3}{2n^2+n-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n+1}{2n^2+n-1}=\frac{3}{2}.$$

Показательные функции, факториалы

Символом $n!$ обозначается произведение последовательных целых чисел от 1 до n включительно, то есть $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Так, $1!=1$, $2!=1\cdot2=2$, $3!=1\cdot2\cdot3=6$.

Можно заметить, что $n!=(n-1)!\cdot n$.

Поэтому $4!=3!\cdot4=6\cdot4=24$, $5!=4!\cdot5=24\cdot5=120$ и так далее.

По определению $0!=1$.

Справедливо утверждение:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{если } q > 1, \\ 1, & \text{если } q = 1, \\ 0, & \text{если} |q| < 1. \end{cases}$$

Пример 18. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}.$$

Решение. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}=\left(\infty-\infty\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot((n+2)-1)}{(n+1)!\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+2)\cdot(n+3)}=0,$$

так как степень числителя (один) меньше степени знаменателя (два).

Пример 19. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(1-2^n/3^n\right)}{3^n\left(1+2^n/3^n\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(2/3\right)^n}{1+\left(2/3\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{1+0}=1.$$

По ходу решения используется тот факт, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,$$

так как $0<q=2/3<1$.

Пример 20. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{1/n}-2^{1/n}}{3^{1/n}+2^{1/n}}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{1/n}-2^{1/n}}{3^{1/n}+2^{1/n}}=\frac{3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}-2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}}{3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}}=\frac{3^0-2^0}{3^0+2^0}=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 177, 246, 248, 250,252, 254,
257,261, 265

Домашнее задание

1. Решить задачи из Бермана занятие 4

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.