Семинар 3

Параметрическое задание кривых и полярная система координат

Система функций $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ задает на плоскости кривую.

Это можно понять, например, с помощью механической модели: x и y - координаты точки, параметр t - время.

Посчитав для каждого t из заданного промежутка $[t_1, t_2]$ координаты точки $x(t)$, $y(t)$ и нанеся их на чертеж, мы получим кривую – траекторию движения точки на плоскости.

Пример 7. Определить вид кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Возведем каждое уравнение в квадрат и сложим. Получим $x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t$.

Используя основное тригонометрическое тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, имеем $x^2 + y^2 = R^2$.

Ответ. Окружность радиуса R с центром в начале координат.

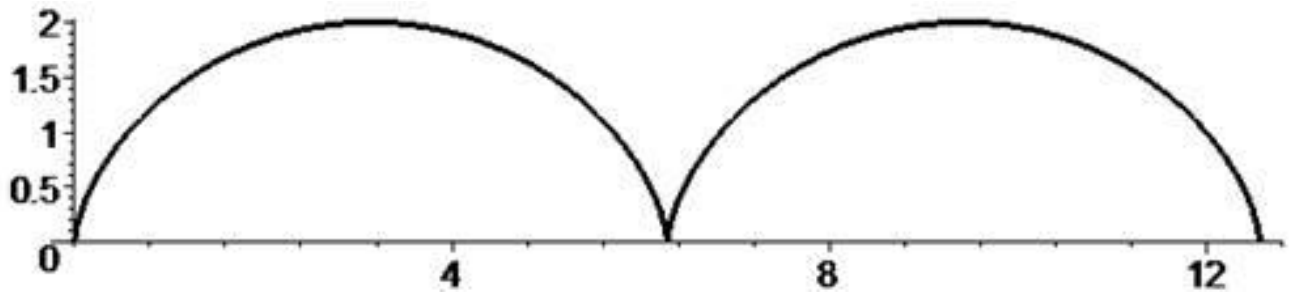
Пример 8. Определить вид кривой, заданной параметрически
$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Решение. Преобразуем
$$\begin{cases} \left(x / a\right) = \cos t, \\ \left(y / b\right) = \sin t. \end{cases}$$

Возведем эти уравнения в квадрат и сложим. Получим каноническое уравнение эллипса
$$\left(x / a\right)^2 + \left(y / b\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Ответ. Эллипс с полуосями a и b, центром в начале координат.

Пример 9. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $t \in (-\infty, \infty)$ - циклоида.



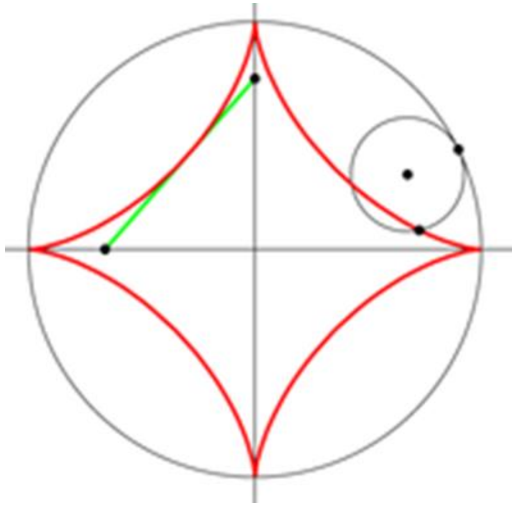
При $t \in [0, 2\pi]$ получаем главную часть – первую арку циклоиды.

На чертеже изображены две арки циклоиды при a=1.

Механический смысл циклоиды: *траектория движения фиксированной точки на ободе колеса радиуса а при его качении по оси Ох без проскальзывания*.

Пример 10. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ - астроида.

На чертеже изображена астроида в случае $a=b$.



Заметим, что в примерах 7) и 8) мы получили уравнение кривой в декартовой системе координат путем исключения параметра t.

В случае циклоиды и астроиды такой прием не проходит – эти кривые строят по точкам.

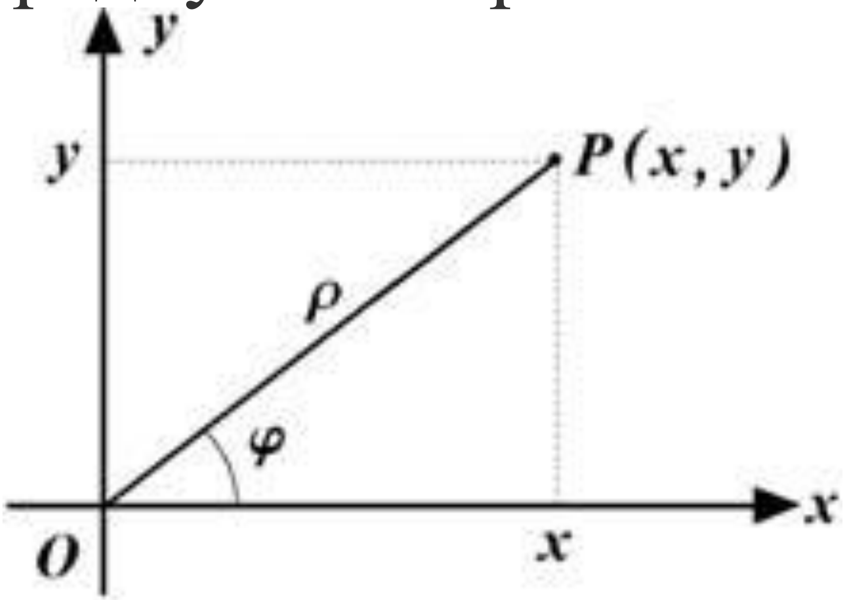
Кроме декартовой системы координат используют ***полярную систему координат***.

Назовем начало системы координат, точку O, ***полюсом***, луч Ox декартовой системы координат – ***полярной осью***.

Полярными координатами точки $P(x, y)$ называют

$\rho = \left|\overrightarrow{OP}\right|$ - расстояние от точки до полюса (***полярный радиус***),

$\varphi = \angle\left(\overrightarrow{OP}, Ox\right)$ - угол между радиус-вектором точки и полярной осью (***полярный угол***).



Связь между полярной и декартовой системами координат задается формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Кривую в полярной системе координат можно задать уравнением: $\rho=\rho(\varphi)$.

Примеры

1) Прямые:

а) $x=a \Leftrightarrow \rho=a/\cos\varphi$ $(a\neq 0)$ - вертикальная прямая;

б) $y=b \Leftrightarrow \rho=b/\sin\varphi$ $(b\neq 0)$ - горизонтальная прямая;

в) $$ax+by+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho=-\frac{c}{a\cos\varphi+b\sin\varphi},$$

$$(c\neq 0,\ \ a^2+b^2\neq 0).$$

произвольная прямая, не проходящая через начало координат.

2) ***Сдвинутые*** **окружности:**

а) $x^2 + y^2 = 2ax \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 2a\cos\varphi$

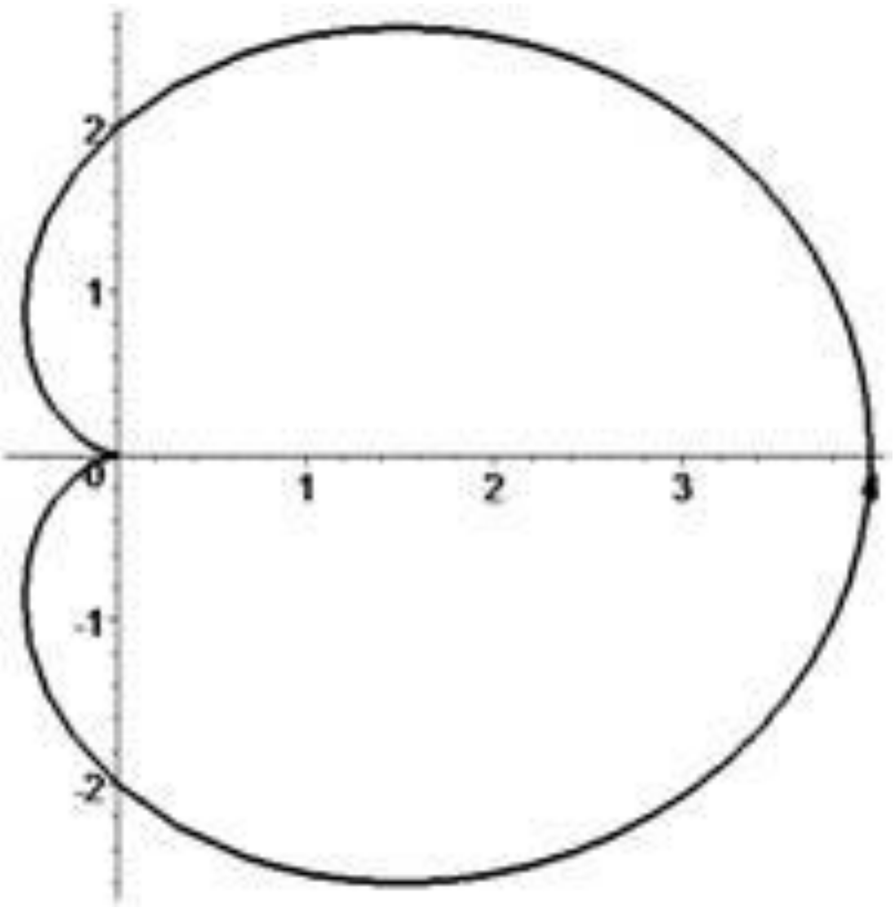
- окружность с центром в точке $C(a,0)$, радиуса $R=|a|$;

б) $x^2 + y^2 = 2by \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 2b\sin\varphi$

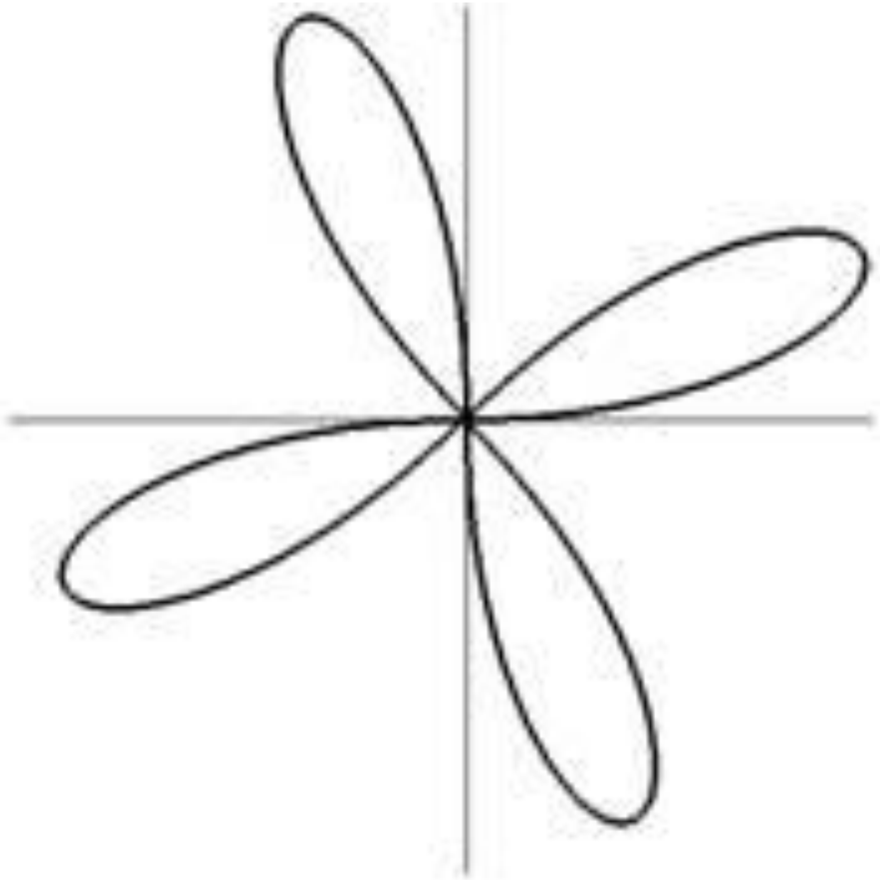
- окружность с центром в точке $D(0,b)$, радиуса $R=|b|$.

3) *Кардиоида*: $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

На рисунке изображена кардиоида при $a=2$.



4) ***n-лепестковая роза***: $\rho = a\cos n\varphi$ или $\rho = a\sin n\varphi$.
На рисунке изображена роза $\rho = a\sin 4\varphi$.

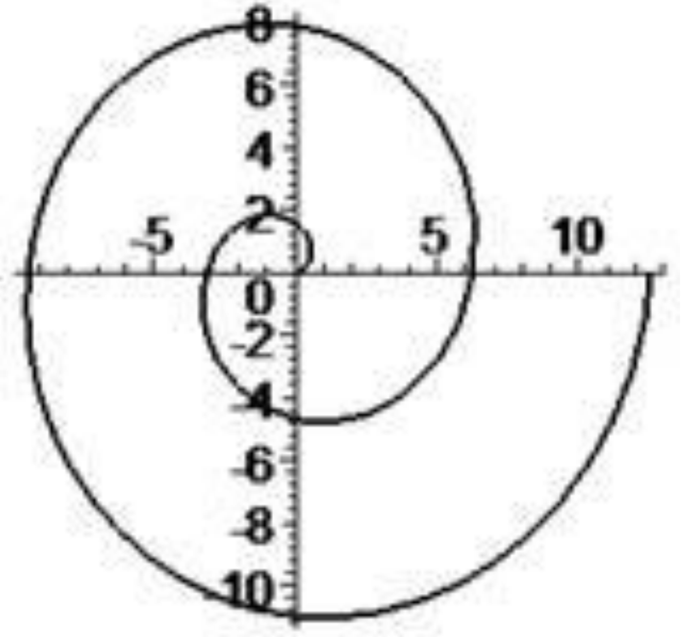


5) ***Спирали***: $\rho=f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ - монотонная функция.

Выделяют:

а) $\rho=a\varphi$ -***спираль Архимеда***, характерная черта спирали Архимеда – постоянное расстояние между соседними витками, равное $2\pi a$.

На чертеже изображено два витка спирали $\rho=\varphi$.

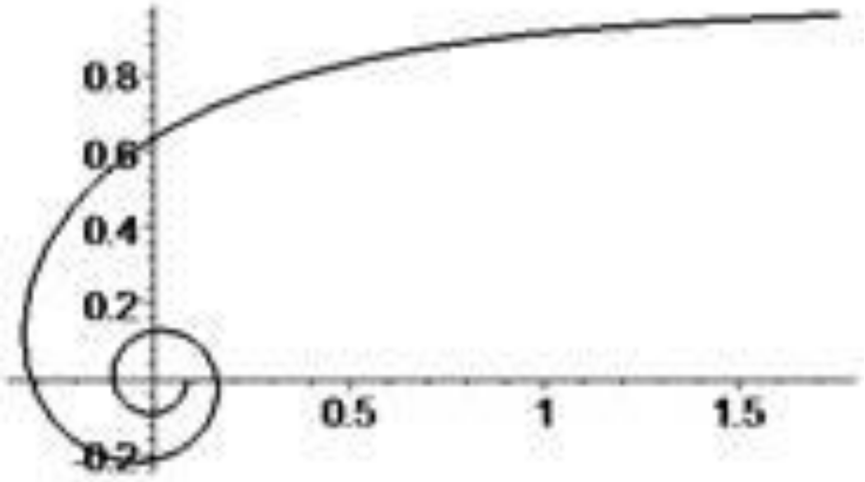


б) $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ - ***гиперболическая спираль***, бесконечное

число витков накручивается к началу координат при $\varphi \to \infty$.

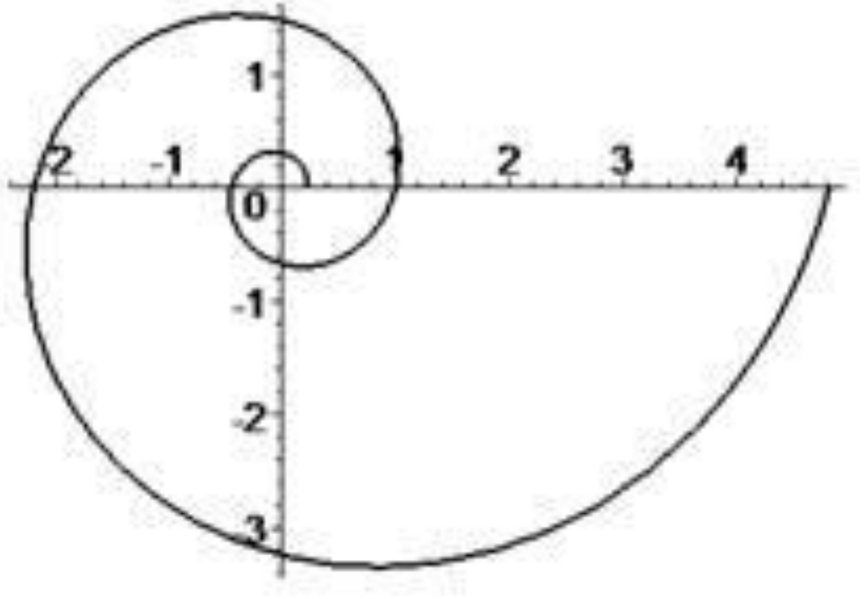
На чертеже изображено два витка спирали

$$\rho = \frac{1}{\varphi}, \qquad \varphi \in (0, 4\pi].$$



в) $\rho = ae^{k\varphi}$ - ***логарифмическая спираль***, бесконечное число витков накручивается и к началу координат и к бесконечности.

На чертеже изображено два витка спирали $\rho = e^{\varphi/4}, \quad \varphi \in [-2\pi, 2\pi]$.



6) Кривые второго порядка: $\rho = \dfrac{p}{1 \pm \varepsilon \cos \varphi}$,

здесь $p>0$ - так называемый ***фокальный параметр***,
ε - ***эксцентриситет*** кривой.

Поэтому,
при $0 \le \varepsilon < 1$ - получаем ***уравнение эллипса*** (окружность при $\varepsilon=0$),
при $\varepsilon = 1$ - уравнение ***параболы***,
при $\varepsilon > 1$ - уравнение ***гиперболы***.

При этом надо помнить, что ***полюс расположен не в центре кривой, а в одном из ее фокусов***.

Параметрическое задание кривой

Пример 11. Изобразить кривую

$$\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Решение. Исключим параметр t.

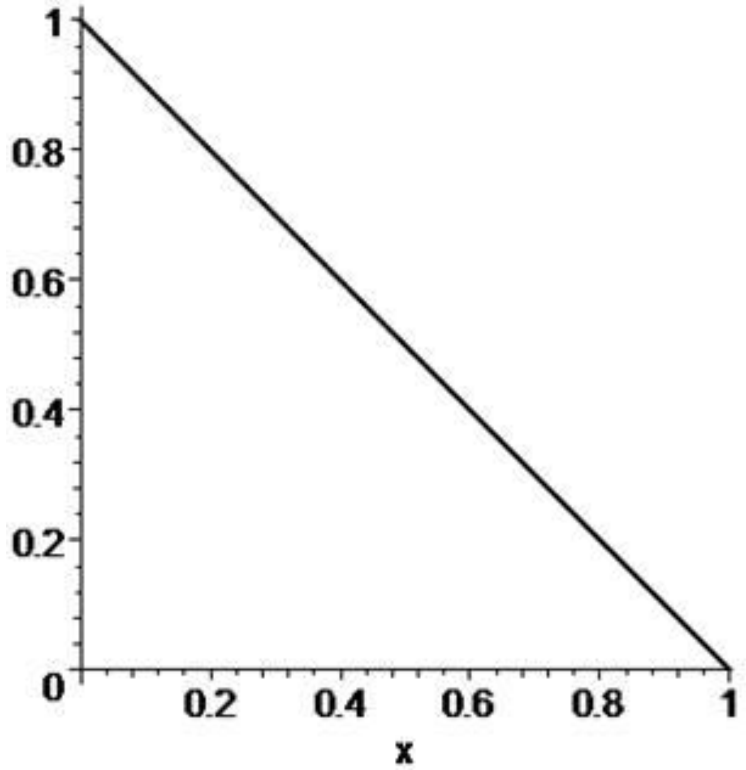
После сложения уравнений получим $x+y=1$.

Было бы грубой ошибкой изображать всю прямую $y=1-x$.

Из первого уравнения видим, что $x\geq 0$, из второго $y\geq 0$.

Поэтому правильный

Ответ: участок прямой $y=1-x$, лежащий в первой четверти.



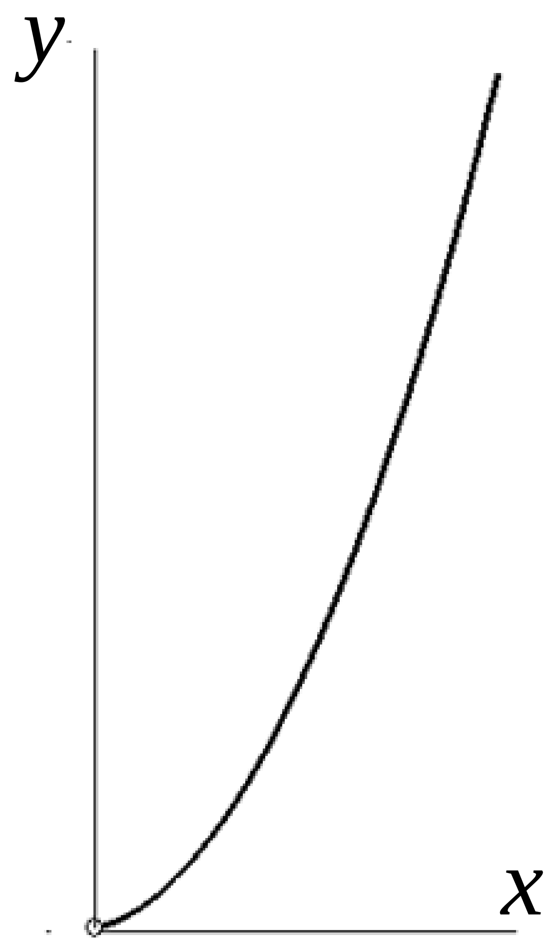
Пример 12. Изобразить кривую

$$\begin{cases} x = e^{t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$$

Решение. Исключим параметр $y = e^{2t} = (e^t)^2 = x^2.$

Получили параболу,
но изображать надо
только первую четверть,
поскольку $x = e^t > 0.$

Ответ. График кривой на рисунке.



Полярная система координат

Пример 13. Какая кривая записана уравнением

$$x^2 + y^2 = -4x?$$

Запишите ее полярное уравнение.

Решение. Перенесем правую часть налево и дополним до полного квадрата

$$x^2 + y^2 = -4x, \;\; x^2 + 4x + y^2 = 0,$$

$$(x^2 + 4x + 4) + y^2 = 4, \; (x+2)^2 + y^2 = 4.$$

Для получения полярного уравнения заменим в первоначальном уравнении $x^2 + y^2 = \rho^2$ и $x=\rho\cos\varphi$.
После сокращения на ρ получим: $\rho=-4\cos\varphi$.
Ответ. Уравнение окружности радиуса 2, с центром в точке $C(-2,0)$. Уравнение кривой в полярной системе координат $\rho=-4\cos\varphi$.

Пример 14. Какая кривая записана уравнением

$$\rho = \frac{1}{1-\cos\varphi}?$$

Запишите ее уравнение в декартовой системе координат.

Решение. Домножим уравнение на $1-\cos\varphi$.
Получим $\rho-\rho\cos\varphi=1$, $\rho=1+\rho\cos\varphi$,

$$\sqrt{x^2+y^2}=1+x, \quad x^2+y^2=(1+x)^2,$$

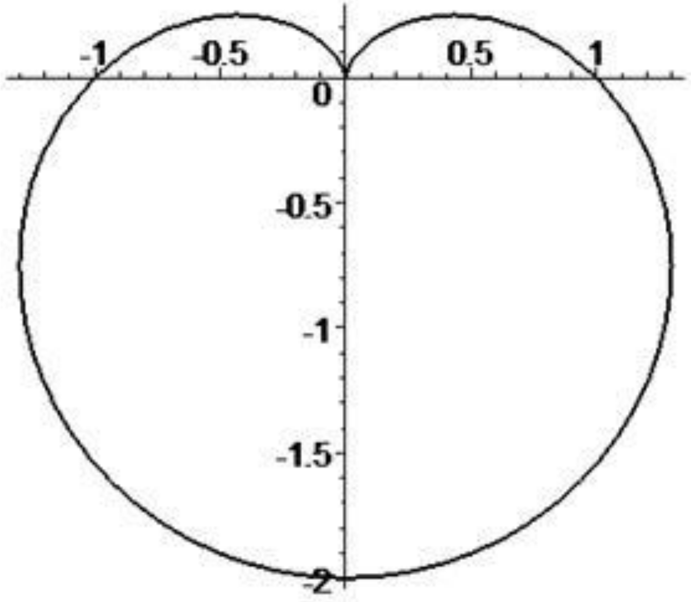
$$x^2+y^2=1+2x+x^2, \quad y^2=2x+1.$$

Ответ. Уравнение параболы $y^2=2x+1$ ветвями направо с вершиной в точке $(-1/2;0)$.

Пример 15.
Какая кривая записана уравнением $\rho = 1 - \sin\varphi$?
Изобразите ее на чертеже.

Решение. Справедлива формула приведения $\cos(\varphi-\pi/2)=\sin\varphi$. Поэтому $\rho=1-\sin\varphi=1-\cos(\varphi-\pi/2)$, то есть мы получили уравнение кардиоиды, параметр φ сдвинут на $\pi/2$, что соответствует повороту на угол 90° кардиоиды $\rho=1-\cos\varphi$.

Ответ. Кардиоида



Работа в аудитории

Решаем задачи из Бермана № 155(1), 156(1), 163, 175(4,6)

Домашнее задание

1. Решить задачи 4, 5 типового расчета 1
2. Решить задачи из Бермана занятие 3

Ответы на задания типового расчета и задания из Бермана студенты, работающие on-line, присылают в Dispace, Дисциплины, Задания. Студенты очники – сдают очно.