ЛЕКЦИЯ 25

Пример 188. Вычислить объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Рассечем эллипсоид плоскостью $x=h$. Получим эллипс

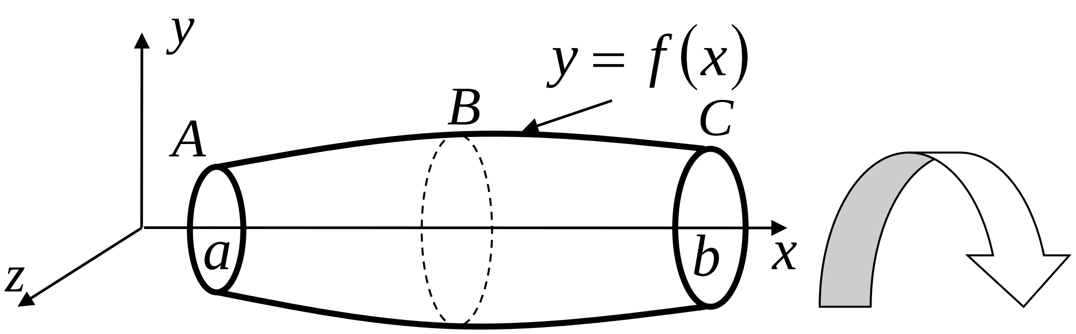
$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1$ с полуосями $b\cdot\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$; $c\cdot\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$.

Площадь эллипса $S=S(h)=(\pi ab)=\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)$.

Тогда $V=\int\limits_{-a}^{a}S(h)dh=\int\limits_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)dh=\pi bc\left(h-\frac{h^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc$.

Вычисление объемов тел вращения

На отрезке $[a;b]$ задана функция $y = f(x)$, которая образует линию ABC. Линия вращается вокруг оси Ox и образует поверхность вращения. Найти объем тела заключенного между этой поверхностью и плоскостями $x = a,\ x = b$.



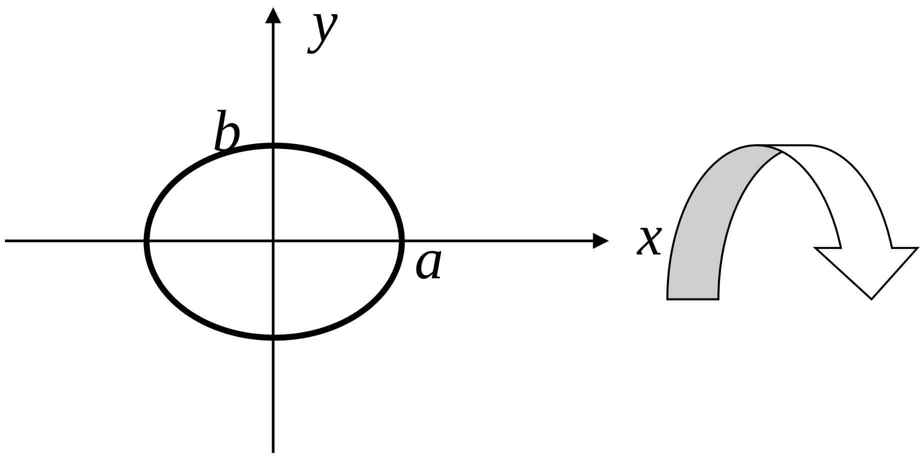
Площадь поперечного сечения тела равна $S(x) = \pi y^2 = \pi(f(x))^2$.

Тогда объем тела равен $$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Аналогично, в случае вращения линии $x = \varphi(y)$, заданной на отрезке $[c;d]$, вокруг оси Oy

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy.$$

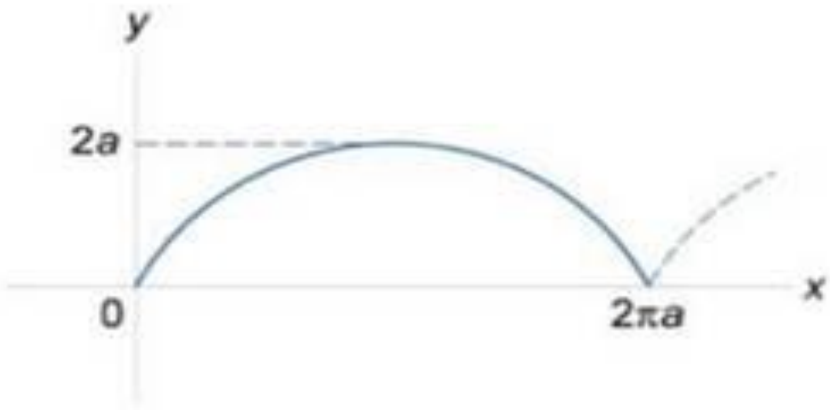
Пример 189. Вычислить объем, образованный вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox.

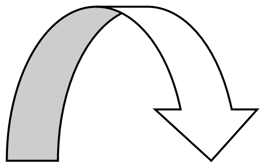


Решение. $V = 2\int_0^a \pi y^2 dx = 2\int_0^a \frac{\pi b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a =$

$= 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2.$

Пример 190. Вычислить объем тела, образованного вращением одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$ вокруг оси Ox.





Решение. $V = \pi \int\limits_0^{2\pi a} y^2 dx$, $\quad dx = a(1 - \cos t)dt$, $\quad \begin{matrix} x_1 = 0 & t_1 = 0 \\ x_2 = 2\pi a & t_2 = 2\pi \end{matrix}$.

$$V = \pi \int\limits_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int\limits_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t)dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= \pi a^3 \left((t - 3\sin t)\Big|_0^{2\pi} + 3\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt - \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t) d\sin t \right) =$$

$$= \pi a^3 \cdot 2\pi + \pi a^3 \left(\frac{3}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi^2 a^3 + \frac{3}{2} 2\pi \cdot \pi a^3 = 5\pi^2 a^3 .$$

Ответ. $V = 5\pi^2 a^3$.