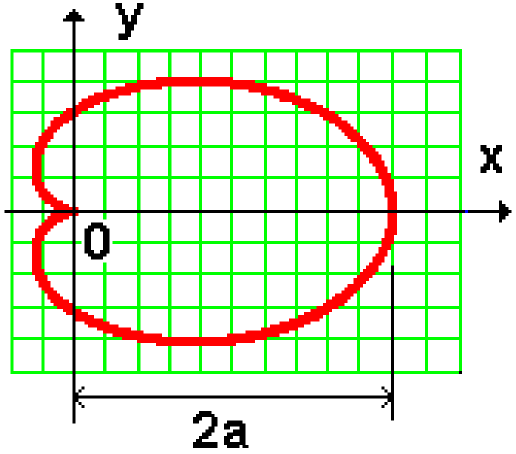
ЛЕКЦИЯ 24

Пример 182. Вычислить площадь кардиоиды $\boldsymbol{r = a(1+\cos\varphi)}$.

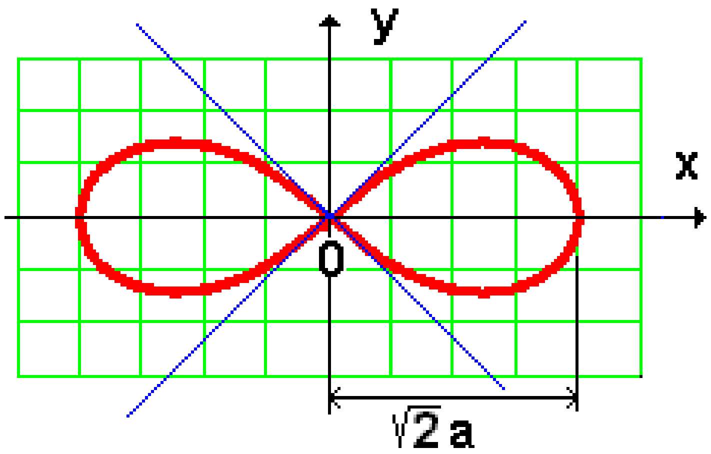


Решение. В силу симметрии

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Пример 183. Вычислить площадь лемнискаты Бернулли



$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

Решение. Перейдем к полярным координатам: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

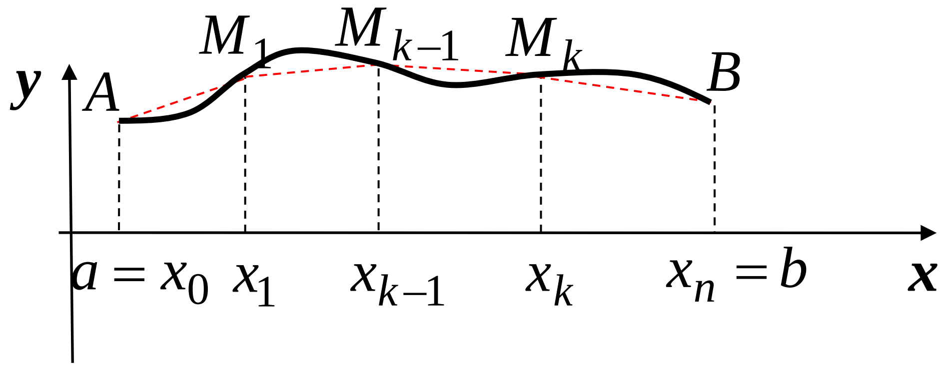
$$(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)^2=a^2(r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi)\Rightarrow r^2=a^2\cos 2\varphi,$$

$$r=a\sqrt{\cos 2\varphi}\,.$$

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\,\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=a^2.$$

9.3. Вычисление длины дуги кривой

Длина дуги плоской кривой в прямоугольной системе координат



Пусть $\boldsymbol{y = f(x)}$ определена и непрерывна на отрезке $\boldsymbol{[a;b]}$. Кривая $\boldsymbol{l}$ – график функции. Найти длину дуги $\boldsymbol{l}$ на отрезке $\boldsymbol{[a;b]}$. Разобьем отрезок $\boldsymbol{[a;b]}$ на $\boldsymbol{n}$ частей произвольным образом $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b}$ $\boldsymbol{\Delta x_k = x_k - x_{k-1}}$ $\boldsymbol{k = 1,\ldots,n}$. Проведем вертикальные прямые до пересечения с кривой $\boldsymbol{l}$.

Соединим точки $M_0 = A, M_1, ..., M_n = B$ хордами. Обозначим длину ломаной через l_n.

$$l \approx l_n = \left|\overline{AM_1}\right| + \left|\overline{M_1M_2}\right| + ... + \left|\overline{M_{n-1}B}\right| = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k\,, \qquad \lambda = \max_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0.$$

Если существует предел $l = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta l_k$, то ***дуга спрямляемая*** и ее длина равна l.

Если предел не существует, то дуга не спрямляемая и длина не существует.

$$\Delta l_k = \left| M_{k-1} M_k \right| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \right)^2} .$$

По теореме Лагранжа $\dfrac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \quad \xi_k \in (x_{k-1}; x_k).$

Тогда $\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$,

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k \overset{def}{=} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

Итак, если $f(x)$ имеет на $[a;b]$ непрерывную производную, то дуга

AB спрямляемая и ее длина $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$

Пример 184. Найти длину дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $\quad 0 \le |x| \le R$, $\quad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

Из условия симметрии

$$\frac{1}{4} l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \int_0^R \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = R \frac{\pi}{2}.$$

Ответ. $l = 2\pi R$.

Уравнение линии задано параметрически

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1; t_2]$$

$x(t), y(t)$ - непрерывные функции с непрерывными производными на отрезке $[t_1; t_2]$.

$x'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in [t_1; t_2]$

$$dx = x'(t)dt, \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'(t)dt.$$

Тогда

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt}.$$

Пример 185. Найти длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$,

$0 \le t \le 2\pi$.

Решение. $l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$

$= a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a$.

Ответ. $l = 8a$.

В пространственном случае $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2.$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt\,.$$

Пример 186. Найти длину одного витка винтовой линии

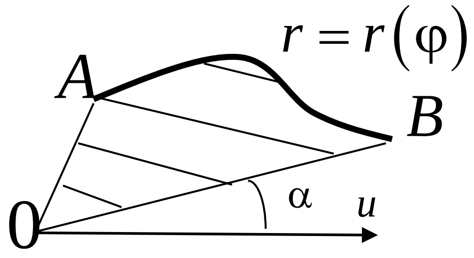
$$x = a\cos t;\ \ y = a\sin t;\ \ z = amt;\ \ 0 \le t \le 2\pi$$

Решение. $x_t' = -a\sin t,\ \ y_t' = a\cos t,\ \ z_t' = am$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+m^2}\,dt = 2\pi a\sqrt{1+m^2}\,.$$

Ответ. $l = 2\pi a\sqrt{1+m^2}\,.$

Длина дуги в полярной системе координат



$$\boldsymbol{r = r(\varphi),\quad \varphi \in [\alpha;\beta].}$$

$\boldsymbol{r(\varphi)}$ и $\boldsymbol{r'(\varphi)}$ непрерывны на отрезке $\boldsymbol{[\alpha;\beta]}$.

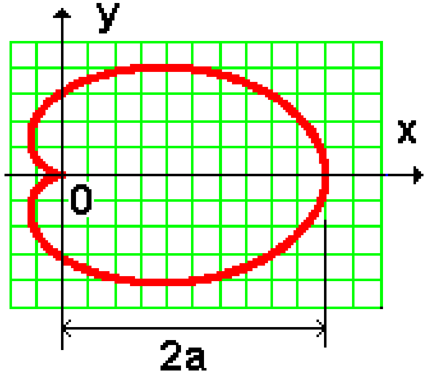
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \quad \forall\varphi \in [\alpha;\beta].$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические.

$$\left.\begin{aligned} x'_\varphi &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ y'_\varphi &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = r^2 + (r')^2.$$

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi}.$$

Пример 187. Найти длину кардиоиды $\boldsymbol{r = a(1+\cos\varphi)}$.



$$0 \le \varphi \le \pi \Rightarrow \frac{1}{2} l, \qquad r' = -a\sin\varphi$$

$$r^2 + (r')^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

В силу симметрии $\boldsymbol{l = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi = 4a\int\limits_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a}$.

Ответ. $\boldsymbol{l = 8a}$.

Дифференциал длины дуги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \qquad x \in [a;b].$$

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt, \qquad l'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}, \qquad dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$

Т.к. $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то $\boxed{dl = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}}$

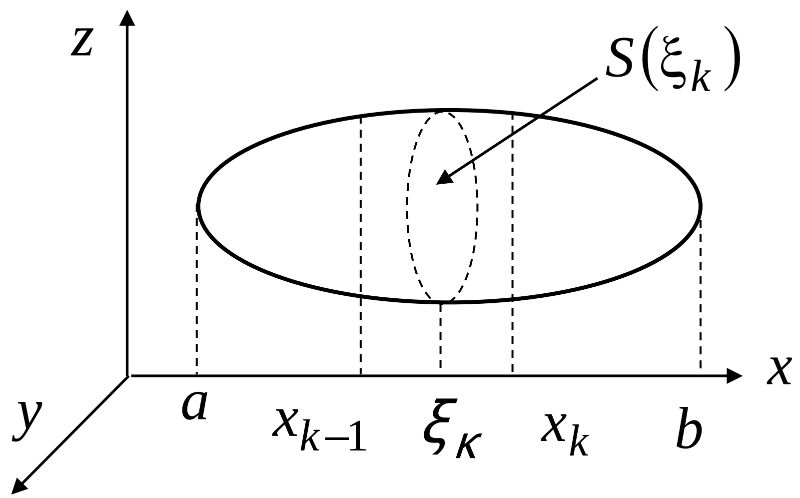
$\boxed{dl^2 = dx^2 + dy^2}$ - аналог теоремы Пифагора.

9.4. Вычисление объемов произвольных тел

Вычисление объемов по известным поперечным сечениям

Пусть $\boldsymbol{S(x)}$- известная функция - площадь поперечного сечения.

$\boldsymbol{S(x)}$ - непрерывна на отрезке $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$. Разобьем отрезок $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ на $\boldsymbol{n}$ отрезков



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$\Delta x = x_k - x_{k-1}, \quad \lambda = \max_{[a;b]}\left\{\Delta x_k\right\}, \quad k = 1,...,n.$$

Проведем плоскости $x = x_k$, $k = 1,...,n$.

На отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ выберем точку ξ_k, $k = 1,...,n$.

Вычислим $S(\xi_k)$. Тогда

$$\Delta V_k = S(\xi_k)\Delta x_k, \qquad V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k.$$

Значит объем тела равен

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k \overset{def}{=} \int_a^b S(x)dx.$$