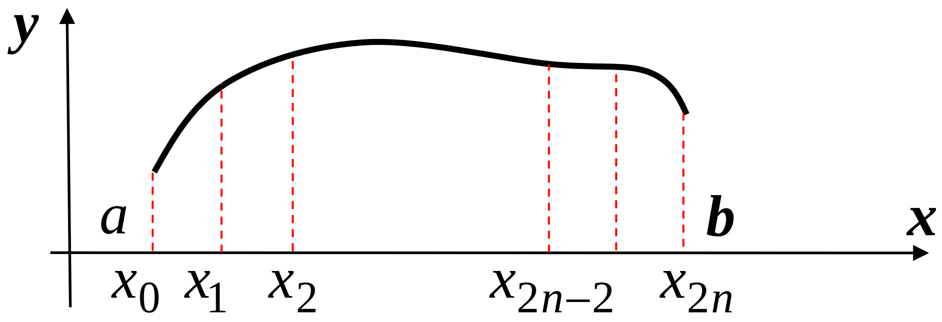
ЛЕКЦИЯ 23

Метод параболических трапеций (Метод Симпсона)

Заменяем график подынтегральной функции дугами парабол, оси которых параллельны оси Oy. Разобьем отрезок интегрирования $[a;b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{2n} = b$ на $2n$ равных частей, $y_0, ..., y_{2n}$ - значения функции в точках деления.

$$y_k = a_k x^2 + b_k x + c_k, \qquad \frac{b-a}{2n} = h, \qquad x_k = a + \frac{b-a}{2n} k, \qquad k = 0, ..., 2n.$$



В силу аддитивности определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx.$$

Через каждые три точки можно провести параболу

$$y_k(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k.$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} (a_n x^2 + b_n x + c_n)dx.$$

$$\int_{x_0}^{x_2}\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)dx=\frac{a_1}{3}\left(x_2^3-x_0^3\right)+\frac{b_1}{2}\left(x_2^2-x_0^2\right)+$$

$$+c_1\left(x_2-x_0\right)=\frac{x_2-x_0}{6}\left(2a_1\left(x_2^2+x_2x_0+x_0^2\right)+3b_1\left(x_2+x_0\right)+6c_1\right)=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left(a_1x_0^2+b_1x_0+c_1+4a_1\left(\frac{x_2+x_0}{2}\right)^2+4b_1\frac{x_2+x_0}{2}+4c_1+a_1x_2^2+b_1x_2+c_1\right)=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left(y_0+4y_1+y_2\right).$$

Просуммируем интегралы

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}\left(a_kx^2+b_kx+c_k\right)dx=\frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1})).$$

Это ***формула парабол*** или ***формула Симпсона***

Ошибка при вычислении интеграла не превышает

$$\boxed{\Delta(n) \le \sup_{[a;b]} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right| \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}}.$$

Для $\int_a^b P_m(x)dx$, где $P_m(x)$ - многочлен m-ой степени при

$m \le 3 \to \sup_{[a;b]} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right| = 0$, т.е. формула точная.

Пример 178. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ с точностью

$\Delta = 0{,}001$.

Решение. Определим ***n***. $\Delta(n) \le \sup_{[a;b]} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right| \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{24}{(1+x^2)^5}(1-10x^2+5x^4).$$

$$\sup_{[0;1]} \left| f^{\mathrm{IV}}(x) \right| = 24 \sup_{[0;1]} \left| 5x^4 - 10x^2 + 1 \right| = 24 \cdot 4 = 96.$$

$$\frac{96}{180(2n)^4} \le 0{,}001 \Rightarrow n^4 \ge \frac{100}{3} \Rightarrow n \ge 2{,}4.$$

Примем $n = 3$ $2n = 6$

k	x_k	$y_k = \dfrac{1}{1+x_k^2}$
0	0	1
1	1/6	36/37
2	1/3	9/10
3	1/2	4/5

k	x_k	$y_k = \dfrac{1}{1+x_k^2}$
4	2/3	9/13
5	5/6	36/61
6	1	1/2

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{18}\left(1+0,5+2\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{13}\right)+4\left(\frac{36}{37}+\frac{4}{5}+\frac{36}{61}\right)\right)=0,7854.$$

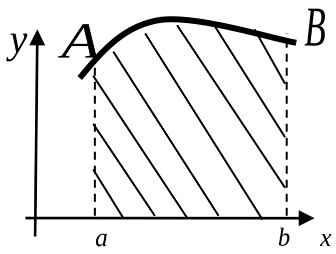
$$n=3 \Rightarrow \Delta \le \frac{1}{2430} < 0,00045$$

Ответ. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,7854 \pm 0,00045.$

9. Геометрические приложения определенного интеграла

9.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат

1) Если $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a;b]$, то из геометрического смысла определенного интеграла $\boxed{S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx} \geq 0.$

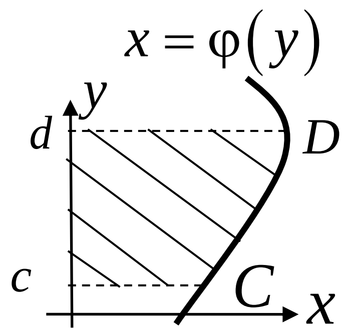


$y = f(x)$

Если $f(x) < 0 \ \forall x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx < 0 \quad a < b$.

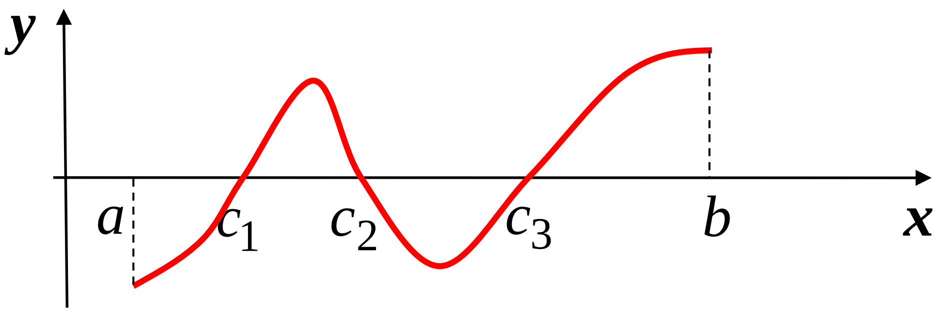
Следовательно, $S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| = -\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_a^b ydx$.

2) Пусть $x = \varphi(y) \geq 0, \quad S = \int\limits_c^d \varphi(y)dy$.



Если $x = \varphi(y) < 0$, то $S = \left|\int\limits_c^d \varphi(y)dy\right| = -\int\limits_c^d \varphi(y)dy$.

3) Если на отрезке [a; b] для одних значений ***x*** функция $f(x) \geq 0$, а для других отрицательная,

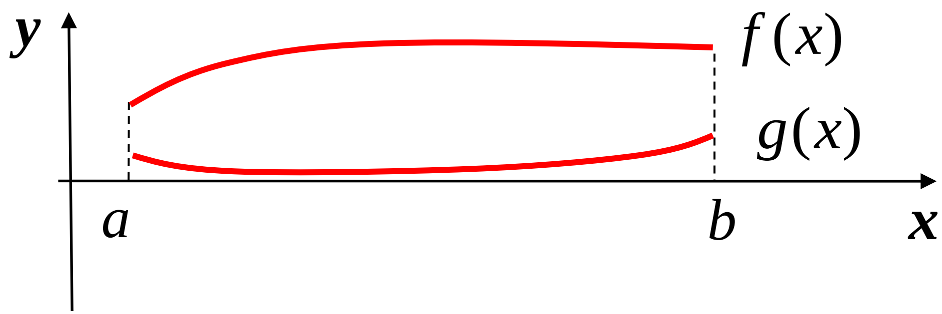


то

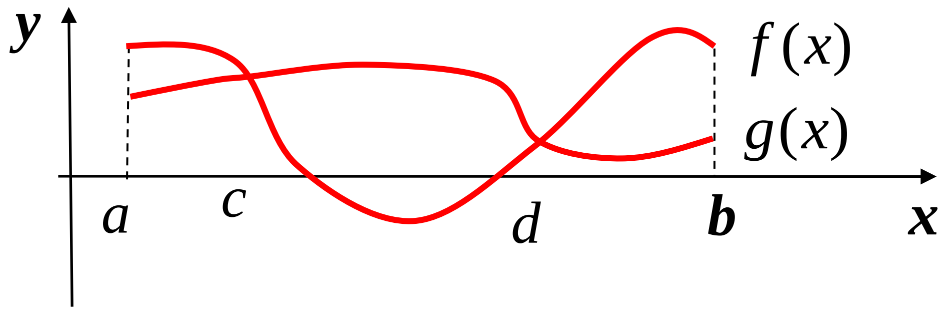
$$S = -\int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx - \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \int_{c_3}^{b} f(x)dx \,.$$

4) Если плоская фигура ограничена двумя линиями $f(x)$, $g(x)$ и

$\boldsymbol{f(x) \geq g(x)}$, то $\quad \boldsymbol{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx}$.

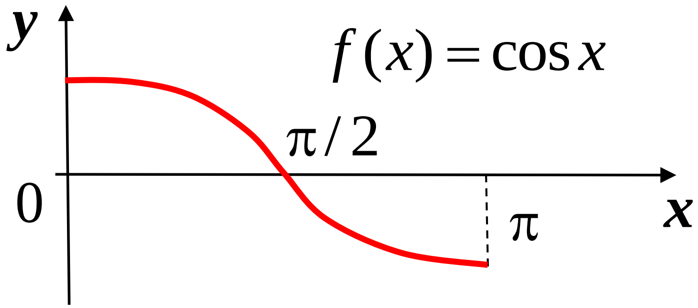


5) В общем случае



$$S=\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^d (g(x)-f(x))dx+\int_d^b (f(x)-g(x))dx.$$

Пример 179. Вычислить площадь фигуры, ограниченной координатными осями и линиями $y = \cos x$, $x = \pi$.



Решение. $$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \right| = \int_0^{\pi} |\cos x| dx.$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

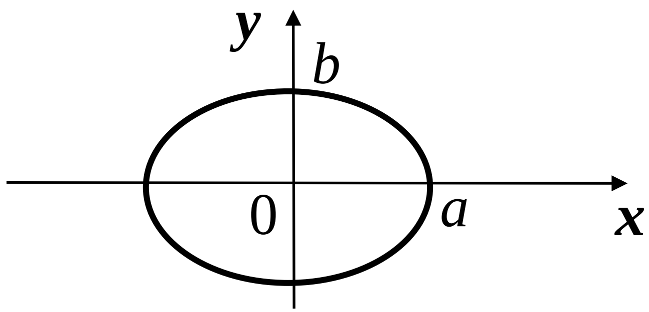
$$S_2 = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \right| = \left| \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| = \left| \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right| = |-1| = 1.$$

Ответ. $S = 1 + 1 = 2.$

Параметрическое задание линий

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2, \qquad dx = x'(t)dt, \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Пример 180. Вычислить площадь эллипса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$.



Решение. $\dfrac{1}{4}S = \displaystyle\int_0^a y\,dx, \quad y = b\sin t, \quad dx = -a\sin t\,dt, \quad x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2},$

$x_2 = a \Rightarrow t_2 = 0.$

$$S = 4\int_0^a y\,dx = -2ab\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos 2t)\,dt = -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \pi ab.$$

Пример 181. Вычислить площадь одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение. $S=\int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$

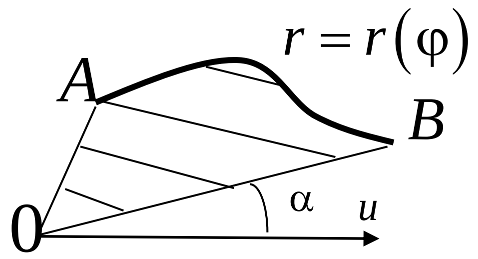
$$= a^2\left(\int\limits_0^{2\pi} dt - 2\int\limits_0^{2\pi}\cos t dt + \int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t dt\right) = a^2\left((t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt\right) =$$

$$= a^2\left(2\pi + \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right) = 3\pi a^2.$$

Ответ. $S = 3\pi a^2$.

9.2. Площадь плоской фигуры в полярных координатах

Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\boldsymbol{l}$, заданной в полярной системе координат $\{0, r, \varphi\}$ уравнением $r = r(\varphi)$ $\alpha \le \varphi \le \beta$.



За базовую фигуру примем криволинейный сектор, ограниченный линией $r = r(\varphi)$ и радиус-векторами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. ***Правильная фигура***, если любой луч $\varphi = \varphi^*$ $\quad \alpha \le \varphi^* \le \beta$ пересекает $\boldsymbol{l}$ в одной точке. Считаем, что $r = r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Для вычисления S_{OAB} разобьем отрезок $[\alpha;\beta]$ на n частичных отрезков точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$. Обозначим $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, $k = 1,\ldots,n$. На каждом частичном отрезке $[\varphi_{k-1};\varphi_k]$ выберем произвольную точку θ_k и найдем $r_k = r(\theta_k)$, $k = 1,\ldots,n$.

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k, \qquad \lambda = \max_{[\alpha,\beta]}\{\Delta\varphi_k\} \to 0.$$

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k. \qquad S = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k \overset{def}{=} \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi}.$$