ЛЕКЦИЯ 22

Исследовать на сходимость несобственные интегралы 2-го рода.

Пример 172. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty$.

Ответ. Интеграл расходится.

Пример 173. $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad \alpha \in R \quad a < b.$

а) $\alpha \neq 1$ $\quad \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} (b-x)^{-\alpha} d(b-x) =$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^{b-\varepsilon} = -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\varepsilon^{1-\alpha} - (b-\alpha)^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha < 1, \\ \infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

б) $\alpha = 1$ $\quad \int\limits_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \ln|b-x|\Big|_a^{b-\varepsilon} =$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} (\ln|\varepsilon| - \ln|b-a|) = \infty.$$

Ответ. При $\alpha < 1$ интеграл сходится, при $\alpha \geq 1$ интеграл расходится.

Теорема 8.9. (***признак сравнения***). Пусть в левой (правой) окрестности точки $\boldsymbol{b}$ (точки $\boldsymbol{a}$) определены функции $\mathbf{0} \le \boldsymbol{f(x)} \le \boldsymbol{g(x)}$. Тогда

$$\int_a^b g(x)dx \text{ - сходится} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ - сходится;}$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ - расходится} \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ - расходится.}$$

Теорема 8.10. (***предельный признак сравнения***). Пусть функции $f(x), g(x) \geq 0$ на $[a;b)$; b - точка разрыва функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to b-\varepsilon} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, то

Несобственные интегралы 2-го рода $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Аналогично для точек разрыва $c \in (a;b)$.

Примеры применения признаков сравнения для исследования несобственных интегралов 2-го рода на сходимость.

Пример 174. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+2x^2+3x}$.

Решение. Применим признак сравнения. Сравним с интегралом $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}; \qquad \frac{1}{\sqrt{x}+2x^2+3x}<\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x\in(0;1].$$

Т.к. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1=2$ - интеграл сходится.

Ответ. Исходный интеграл сходится.

Пример 175. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-3)(x-4)}$.

Решение. Применим предельный признак сравнения. Сравним с интегралом $\int\limits_1^3 \frac{dx}{(3-x)}$ - расходится т.к. $\alpha = 1$. $g(x) = \frac{1}{3-x}$

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3-0} \frac{(3-x)}{(x-3)(x-4)} = -\lim_{x\to 3-0} \frac{1}{x-4} = 1 > 0.$$

Ответ. Исходный интеграл расходится.

Пример 176. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Применим предельный признак сравнения. Сравним с интегралом $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}$ $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ интеграл сходится.

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} > 0.$$

Ответ. Исходный интеграл сходится.

8.9. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Постановка задачи

Вычислить приближенно интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и известна первообразная $F(x)$, то

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Но иногда найти первообразную $\boldsymbol{F(x)}$ невозможно. В этих случаях интеграл вычисляется приближенно.

$\boldsymbol{I}$ - точное значение интеграла;

$\boldsymbol{\hat{I}}$ - приближенное значение интеграла.

$\left|\boldsymbol{\hat{I}} - \boldsymbol{I}\right| = \boldsymbol{\Delta}$ - абсолютная погрешность вычисления интеграла.

Тогда возникают две задачи:

1) Найти приближенное значение интеграла $\boldsymbol{\hat{I}}$ и оценить погрешность его вычисления $\boldsymbol{\Delta}$.

2) Найти приближенное значение интеграла $\boldsymbol{\hat{I}}$ с заданной точностью вычисления $\boldsymbol{\Delta}$, т. е. подобрать метод вычисления, чтобы обеспечить заданную погрешность $\left|\boldsymbol{\hat{I}} - \boldsymbol{I}\right| < \boldsymbol{\Delta}$.

Метод средних прямоугольников

Нужно вычислить значение интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ - непрерывная функция на отрезке $[a;b]$. Для простоты примем, что $f(x) \geq 0$.

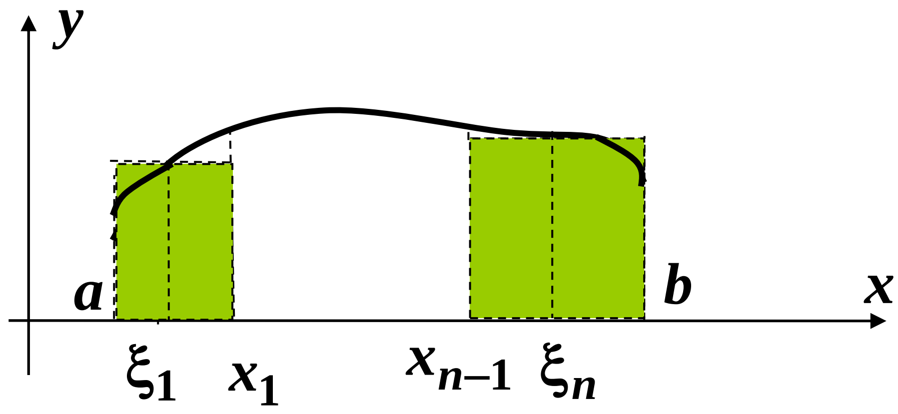
Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k,\quad k = \overline{1,n-1},\quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$ - ***шаг разбиения***.

На каждом элементарном отрезке $[x_k; x_{k-1}]$ выберем точку

$\xi_k = \dfrac{(x_k + x_{k-1})}{2}$ и вычислим значение функции в данной точке

$f(\xi_k) = y_k$.



Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x \Leftrightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Следовательно, значение интеграла приближенно равно

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k .$$

Это ***формула средних прямоугольников***.

Пусть существует вторая производная подынтегральной функции $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$. Можно показать, что ошибка при вычислении интеграла не превышает

$$\Delta(n) \le M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}, \qquad \text{где } M_2 = \sup_{[a;b]} \left| f''(x) \right|.$$

Пример 177. Вычислить приближенное значение интеграла $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ с точностью $\Delta = 0{,}01$.

Решение. Сначала определим количество разбиений n.

$$\sup_{[0;1]} \left| f''(x) \right| \frac{(b-a)^3}{24n^2} \le 0{,}01. \quad f(x) = \frac{1}{1+x}; \; f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \; f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

$$\sup_{[0;1]} \left| f''(x) \right| = \sup_{[0;1]} \frac{2}{(1+x)^3} = 2; \qquad 2 \cdot \frac{1}{24n^2} \le 0{,}01, \qquad n^2 \ge \frac{25}{3}, \qquad \boxed{n=3}\,.$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}, \qquad y_k = \frac{1}{1+\xi_k}, \qquad \xi_k = \frac{(x_{k-1} + x_k)}{2}, \qquad k = \overline{1,3}.$$

k	ξ_k	y_k
1	1/6	6/7
2	3/6	6/9
3	5/6	6/11

$$I = 0,69315$$

$$\sum_{k=1}^{3} y_k = \frac{478}{231}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} y_k = \frac{478}{693} = 0,6897 \pm \Delta .$$

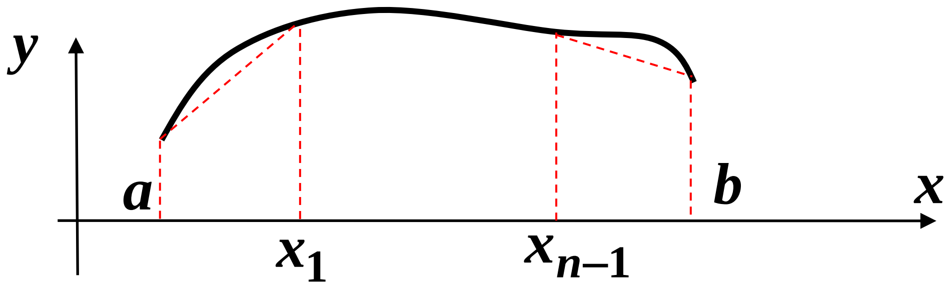
$$\Delta \le \sup_{[0;1]} \left| f''(x) \right| \frac{(b-a)^3}{24n^2} = 2 \cdot \frac{1}{24 \cdot 9} = \frac{1}{108} = 0,0093 .$$

Ответ. Значение интеграла ***I*=0,69315**.

Точность вычисления $\Delta = 0,0093$.

Метод трапеций

Разобьем отрезок **[*a*;*b*]** на ***n*** равных частей $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = \overline{1,n}$ и построим ***n*** трапеций.



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}(x_1 - x_0) + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \left| y_k = f(x_k), \quad x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \right| = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) =$$

$$= \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n) = \hat{I}(n).$$

Это ***формула трапеций***.

Если длина элементарного отрезка $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \to 0 \Rightarrow \hat{I}(n) \to I$

Можно показать, что ошибка при вычислении интеграла не пре-

вышает $$\Delta(n) \le \sup_{[a;b]} \left| f''(x) \right| \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$