ЛЕКЦИЯ 21

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a;b]$. Тогда $d(uv)=udv+vdu$. Проинтегрируем это равенство на отрезке $[a;b]$.

$$\int_a^b d(uv)=\int_a^b udv+\int_a^b vdu,\qquad \int_a^b d(uv)=uv\Big|_a^b,$$

$$\boxed{\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu}.$$

Это формула интегрирования по частям для определенного интеграла.

Примеры решения задач. Вычислить определенные интегралы

Пример 165. $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x\,dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Пример 166. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, & v = \operatorname{tg} x \end{matrix} \right| = x\operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx =$

$$= x\operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0 = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

8.8. Несобственные интегралы

Понятие несобственного интеграла

При определении определенного интеграла как предела интегральной суммы предполагалось:

1) a и b - конечны.

2) Подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна или существует конечное число точек разрыва 1-го рода.

В этом случае определенные интегралы называются ***собственными***.

Если хотя бы одно из условий не выполнено, то интегралы называются ***несобственными*****.** Тогда определение теряет смысл.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1-го рода)

Пусть $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Тогда она непрерывна на отрезке $[a;b]\subset[a;\infty)$. Тогда существует интеграл $I(b)$:

$$I(b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Будем увеличивать $(b\to\infty)$. Возможны 2 случая.

1) $I(b)$ имеет предел;

2) $I(b)$ предела не имеет.

Определение 8.2. Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;\infty)$ называется предел $I(b)$ при $b \to +\infty$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если предел существует, то ***интеграл сходящийся***, если не существует, то ***интеграл расходящийся***.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$ обозначается $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

и представляется в виде $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \quad c \in (-\infty;\infty).$

Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx.$

Если хотя бы один из пределов не существует, то интеграл расходится. Это ***несобственные интегралы 1-го рода***.

Пример 167. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ $\alpha \in R$ $\alpha \neq 1$.

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \forall\alpha > 1, \\ \infty & \forall\alpha < 1. \end{cases}$$

Пример 168. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b - \ln 1 = \infty$.

Вывод. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ - сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 169. Вычислить несобственный интеграл 1-го рода или доказать его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_a^0 + \lim\limits_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b =$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) + \lim\limits_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

Несобственный интеграл 1-го рода обладает рядом свойств собственных интегралов.

В частности, формула Ньютона-Лейбница имеет вид

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a), \text{ где } F(\infty) = \lim_{b\to\infty} F(b).$$

Применение формулы Ньютона–Лейбница позволяет сократить запись

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = -e^{-\infty} + 1 = 1.$$

Теорема 8.6. (***признак сравнения***). Если на интервале $(-\infty;\infty)$ определены функции $f(x) \geq 0$ и $\varphi(x) \geq 0$, интегрируемые на каждом отрезке $[a;b]$, причем

$0 \leq f(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \geq a$, то

$\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)dx$ - сходится $\Rightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ - сходится.

$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ - расходится $\Rightarrow \int\limits_a^{\infty} \varphi(x)dx$ - расходится.

Теорема 8.7. (***предельный признак сравнения***). Если на отрезке $[a;b]$ определены функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a;b]$ и существует предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0,$$

то два несобственных интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ - либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Теорема 8.8. Если на промежутке $[a;\infty)$ функция $f(x)$ меняет знак и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится несобственный интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$.

Примеры применения признаков сравнения для исследования несобственных интегралов 1-го рода на сходимость.

Пример 170. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение.

а) Применим признак сравнения. Сравним с несобственным интегралом $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$, который сходится т.к. $\alpha = 3/2 > 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \quad \forall x \geq 1.$$

Ответ. Интеграл сходится.

б) Применим предельный признак сравнения. Сравним с несобственным интегралом $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$, который сходится т.к. $\alpha = 3/2 > 1$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+1}} = 1 > 0.$$

Ответ. Интеграл сходится.

Пример 171. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

$\int\limits_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ - сходится, т.к. $\forall x \quad \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \ (\alpha = 2 > 1)$.

Ответ. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ сходится абсолютно.

Несобственные интегралы от неограниченных функций (2-го рода)

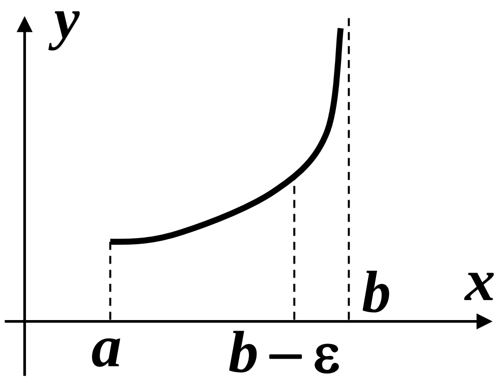
Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$ (b – точка разрыва 2-го рода). Считаем, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b-\varepsilon] \Rightarrow \forall\varepsilon>0:\ \exists \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, зависящий от переменного верхнего предела интегрирования.

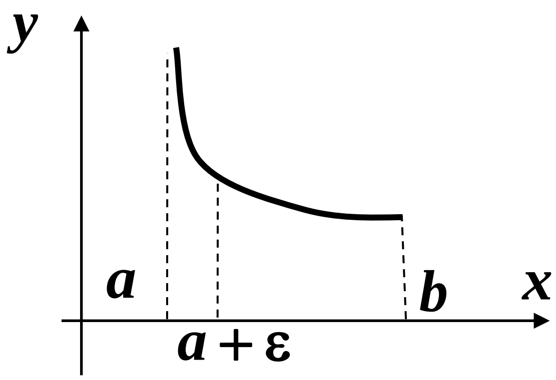
Определение 8.3. Несобственным интегралом от функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x = b$, или ***несобственным интегралом 2-го рода*** называется предел

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad \varepsilon > 0.$$

Аналогично

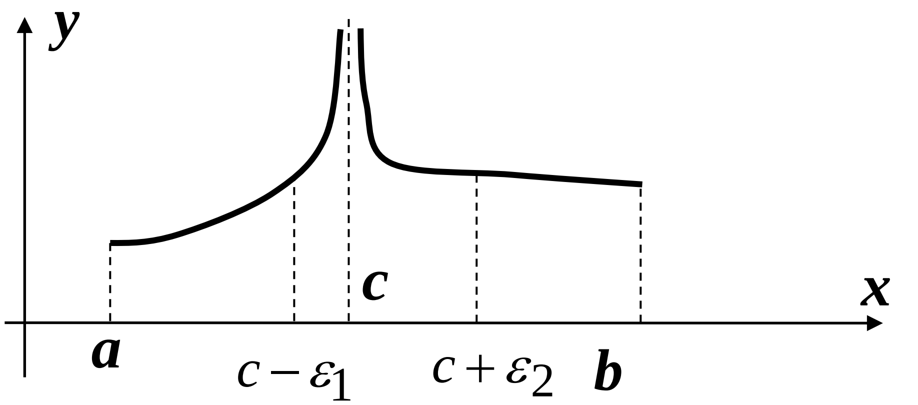
$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad \varepsilon > 0.$$





Если разрыв функции 2-го рода во внутренней точке отрезка **[*a*;*b*]**, то из аддитивности

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx .$$



Если пределы существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы называются ***сходящимися***. В противном случае – ***расходящимися***.