ЛЕКЦИЯ 20

8.3. Условия интегрируемости функций

Необходимое условие интегрируемости функций

Теорема 8.1. Если определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

Достаточные условия интегрируемости

Теорема 8.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Обобщенная теорема

Теорема 8.3. Если функция $f(x)$ ограничена на $[a;b]$ и непрерывна всюду, кроме конечного числа точек разрыва 1-го рода, то существует

$$\int_a^b f(x)dx.$$

8.4. Основные свойства определенного интеграла

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0;$

2) $\int\limits_a^b dx = b - a$

Доказательство. $\int\limits_a^b dx \overset{def}{=} \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a;$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ $\qquad b < a \to \Delta x_k < 0;$

4) $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx \quad \forall c \in R$

Доказательство.

$$\int\limits_a^b cf(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = c\int\limits_a^b f(x_k)dx\,;$$

5) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int\limits_a^b f_n(x)dx$

Доказательство. Аналогично 4);

6) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad c \in (a,b)$$

Доказательство. $$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad \lambda \to 0;$$

7) Если $f(x) \ge 0 \ \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0, \ a < b$

Доказательство. $f(\xi_k) \ge 0$ и $\Delta x_k \ge 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \overset{def}{=} \int_a^b f(x)dx \ge 0;$$

8) Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ интегрируемые и $f(x) \geq \varphi(x)\ \ \forall x \in [a;b]$.

Тогда $$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Доказательство. $f(x)-\varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx =$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx;$$

9) Если $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{M}$ – наименьшее и наибольшее значения $\boldsymbol{f(x)}$ на отрезке

[*a*;*b*], то $$\boldsymbol{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad a<b}$$

Доказательство. $\boldsymbol{m \le f(x) \le M}$, $\quad \boldsymbol{m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx}$,

$$\boldsymbol{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)};$$

10) Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка

$\xi \in [a;b]$: $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказательство. $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow \quad m \le \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$.

Число $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ называется ***интегральным средним значением функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$.

8.5. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) \quad x \in [a;b]$$

Теорема 8.4. Производная определенного интеграла от непрерывной функции по его переменному верхнему пределу существует и равна подынтегральной функции, в которой вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x).$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in [a;b]$ и придадим ей приращение $\Delta x : x + \Delta x \in [a;b]$. Тогда

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,.$$

По теореме о среднем

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt= f(\xi)\Delta x \qquad \xi\in[x;x+\Delta x]$$

$$\Delta x\to 0\Rightarrow \Delta x+x\to x,\ \xi\to x \quad f(\xi)\to f(x)$$

По определению производной

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\xi\to x)}} f(\xi)=f(x)\,.$$

Отсюда следует, что $\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Отсюда ***связь между неопределенным и определенным интегралом***

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C\,.$$

8.6. Формула Ньютона-Лейбница

Итак, функция $f(x)$, непрерывная на $[a;b]$, имеет на этом отрезке первообразную, например

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt\,.$$

Обратная задача: зная одну из первообразных $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычислить определенный интеграл от $f(x)$ на $[a;b]$. Т.е. найти определенный интеграл используя неопределенный.

Пусть $F(x)$ - другая первообразная $f(x)$ на $[a;b]$. Т.к. $\Phi(x)$ и $F(x)$ отличаются друг от друга постоянным слагаемым, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C \quad \forall x \in [a;b];\ C \in R.$$

Для $x = a$ $$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a),$$

т.е. $$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \quad \forall x \in [a;b].$$

Полагая $x = b \Rightarrow$ $$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}.$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Значение определенного интеграла на отрезке $[a;b]$ от непрерывной функции $f(x)$ равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при $x = b$ и $x = a$.

8.7. Основные методы вычисления определенного интеграла

Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница

Вычислить интегралы

Пример 158. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$

Пример 159. $\int\limits_0^1 (6x^2 + 3)dx = (2x^3 + 3x)\Big|_0^1 = (2\cdot 1 + 3\cdot 1) - (2\cdot 0 + 3\cdot 0) = 5.$

Пример 160. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Пример 161. $\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int\limits_1^6 (3+x)^{-\frac{1}{2}} d(3+x) = 2\sqrt{3+x}\Big|_1^6 = 2(3-2) = 2$.

Пример 162. $\int\limits_{-1}^0 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2}(e^0 - e^2) = \frac{e^2 - 1}{2}$.

Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле

Теорема 8.5. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1,t_2]$, причем $\varphi[t_1,t_2]=[a;b]$ и $\varphi(t_1)=a$, $\varphi(t_2)=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Вычислить интегралы

Пример 163. $$\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x=t^2,\ a=0,\ t_1=\sqrt{a}=0 \\ dx=2tdt,\ b=9,\ t_2=\sqrt{9}=3 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^3 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^3 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(t-\ln|1+t|\right)\Big|_0^3 = 6-2\ln 4.$$

Пример 164. $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = \left| \begin{array}{l} \sin x=t,\ a=\frac{\pi}{6},\ t_1=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \\ \cos xdx=dt,\ b=\frac{\pi}{3},\ t_2=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^{-3}dt = -\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\left(4-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$