# ЛЕКЦИЯ 19

**Пример 152.** $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\,\mathrm{tg}\,t \\ dx = a\sec^2 t\,dt \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2(1 + tg^2 t)} \cdot a\sec^2 t\,dt =$

$= a^2 \int \dfrac{dt}{\cos^3 t} = \ldots$ далее решать с помощью универсальной тригонометрической подстановки $z = \mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}$.

Но это не рационально. Удобнее интегрировать по частям.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u=\sqrt{x^2+a^2}, & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ dv=dx, & v=x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(a^2+x^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + \int \frac{a^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Перенося $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ в левую часть, получим

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

Аналогично можно находить интегралы $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

**Пример 153.** $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{a^2+x^2}} = \left| \begin{matrix} x = a\,\mathrm{tg}\,t, & \sqrt{a^2+x^2} = a\sec t \\ dx = a\sec^2 t dt, & \sin t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{a\sec^2 t dt}{a^4\,\mathrm{tg}^4\, t \cdot a\sec t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^4 t} =$$

$$= \frac{1}{a^4}\int (\sin t)^{-4} d(\sin t) - \frac{1}{a^4}\int (\sin t)^{-2} d(\sin t) =$$

$$= -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4 \sin t} + C = -\frac{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^4x^3} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4 x} + C\,.$$

## 7.9.5. Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p dx \quad (m,n,p \in Q;\ a,b \in R)$

Это дифференциальный бином. Применяются подстановки Чебышева:

1) $p \in Z \Rightarrow x = t^s$ ($s$ - наименьшее общее кратное знаменателей $m$ и $n$).

2) $\dfrac{m+1}{n}$ - целое $\Rightarrow a+bx^n = t^s$ ($s$ – знаменатель $p$).

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ - целое $\Rightarrow ax^{-n}+b = t^s$ ($s$ – знаменатель $p$).

Во всех остальных случаях эти интегралы не выражаются через элементарные функции.

**Примеры решения задач.** Найти неопределенные интегралы

**Пример 154.** $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-10} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} p=-10-\text{целое} \\ x=t^4,\ dx=4t^3dt \end{matrix} \right| = \int \frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}} = 4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt =$$

$$= 4\int \frac{dt}{(t+1)^9} - 4\int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = -\frac{4}{8(t+1)^8} + \frac{4}{9(t+1)^9} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8} + \frac{4}{9}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9} + C.$$

**Пример 155.** $\int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \int x^3(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx =$

$$= \left| \begin{matrix} m=3,\ n=2,\ \dfrac{m+1}{n}=2(\text{целое}),\ x^2=a^2-t^2 \\ p=-\dfrac{3}{2},\ \ a^2-x^2=t^2,\ 2xdx=-2tdt \end{matrix} \right| = -\int \frac{(a^2-t^2)tdt}{t^3} =$$

$$= -a^2\int \frac{dt}{t^2} + \int dt = \frac{a^2}{t} + t + C = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

**Пример 156.** $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} p = -\frac{1}{2}, \quad m = -4, \quad n = 2, \quad \frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2 (\text{целое}), \\ 1 + x^{-2} = t^2, \quad -2x^{-3}dx = 2tdt, \quad x^{-3}dx = -tdt \end{array} \right| =$$

$$= \int x^{-4}\left[x^2\left(1+x^{-2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{-5}\left(1+x^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx = -\int\left(t^2-1\right)\frac{1}{t}tdt =$$

$$= -\int\left(t^2-1\right)dt = -\frac{t^3}{3} + t + C = \sqrt{x^{-2}+1} - \frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^{-2}\right)^3} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3x^3} + C.$$

**Пример 157.** $\int x^{\frac{1}{7}}(2x+3)^{\frac{1}{3}}dx = \left| \begin{array}{l} p=\frac{1}{3},\ m=\frac{1}{7},\ n=1,\ \frac{m+1}{n}=\frac{1}{7}+1=\frac{8}{7}, \\ \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{7}+1+\frac{1}{3}=\frac{31}{21} \end{array} \right|.$

Интеграл не выражается через элементарные функции.

## 7.10. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

Раньше мы рассматривали классы интегрируемых в конечном виде функций.

Однако не всякую первообразную $F(x)$ можно выразить через конечное число элементарных функций.

Примеры не выражающихся через элементарные функции интегралов:

$\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона;

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус;

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм;

$\int \cos(x^2)dx;$ $\int \sin(x^2)dx$ - интегралы Френеля;

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ - эллиптический интеграл первого рода;

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx$ - эллиптический интеграл второго рода.

Каждый из этих интегралов представляет из себя функцию, не являющуюся элементарной.

# 8. Определенный интеграл

## 8.1. Интегральная сумма. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ произвольным образом на $n$ частичных отрезков точками $x_0, x_1, ..., x_n$ и обозначим это разбиение через $\tau_n$.

$$\tau_n = \{x_0, x_1, ..., x_n \,|\, a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ - длина частичного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$. На каждом отрезке выберем произвольным образом точку $\xi_k$ и составим сумму

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (8.1)$$

Это ***интегральная сумма Римана*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, соответствующая разбиению $\tau_n$ отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек $\xi_k$ $k=1,\ldots,n$.

Пусть $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$ - диаметр разбиения.

**Определение 8.1.** Если существует конечный предел интегральной суммы (8.1) при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения $[a;b]$ и выбора промежуточных точек $\xi_k$, то этот предел называется ***определенным интегралом*** (***интегралом Римана***) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Тогда функция $f(x)$ - ***интегрируема на отрезке*** $[a;b]$ (***интегрируема по Риману***).

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

$f(x)$ - подынтегральная функция,

$x$ – переменная интегрирования,

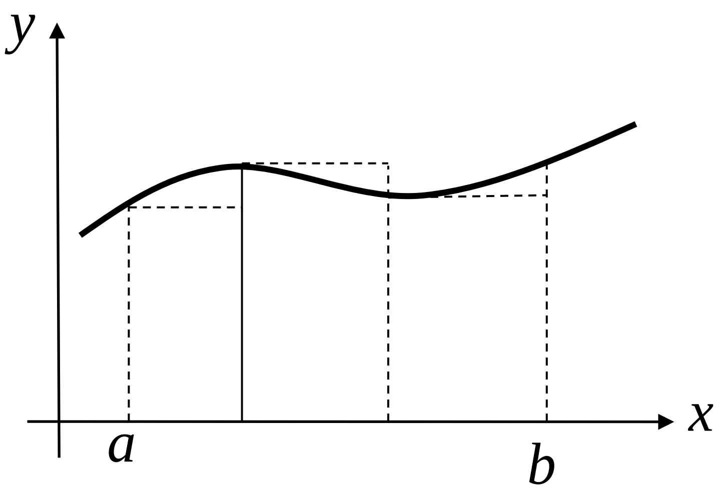
$a$, $b$ – нижний и верхний пределы интегрирования.

То есть определенный интеграл – число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма в случае, когда $\lambda \to 0$.

# 8.2. Геометрический и физический смысл определенного интеграла

## Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \geq 0$.




Фигура называется криволинейной трапецией.

$$\Delta S_k = f(\xi_k)\Delta x_k, \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \approx \text{площади трапеции.}$$

Определенный интеграл от $f(x) \geq 0$ это площадь криволинейной трапеции

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

## Физический смысл определенного интеграла

Пусть материальная точка движется со скоростью $v(t)$ в течении времени $t_0 \leq t \leq T$. Путь, пройденный ею за это время равен

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} v(\xi_k)\Delta t_k = \int_{t_0}^{T} v(t)dt.$$