# ЛЕКЦИЯ 18

## 7.8.2.3. Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Если $n$ – нечетное, то подстановка $\sin x = t$; если $m$ – нечетное, то подстановка $\cos x = t$. Они преобразуют подынтегральную функцию в многочлен.

**Пример 141.** $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx = \left| \sin x = t; \quad \cos x dx = dt \right| =$

$$= \int \sin^4 x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x dx = \int t^4 \cdot (1 - t^2)^2 dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C =$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

**Пример 142.**

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} = \int \sin^3 x \cdot \cos^{-\frac{4}{3}} x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{-\frac{4}{3}} x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \cos x = t; \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right| = -\int (1 - t^2) t^{-\frac{4}{3}} dt = 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5} \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x} + C .$$

Если $(m + n)$ – четное положительное число, тогда применяем тригонометрические формулы, которые понижают степень тригонометрических выражений в подынтегральной функции

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x; \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

**Пример 143.** $\int \sin^2 x \cos^2 x = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

## 7.8.2.4. Интегралы вида $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$; $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$; $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$

Для понижения степени используем формулы тригонометрии

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

**Пример 144.**

$$\int \sin 5x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx = -\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x + C\,.$$

## 7.8.3. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x dx$; $\int \operatorname{ctg}^m x dx \quad m \in N;\ m > 1$

Используем формулы тригонометрии

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1, \qquad \left(\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1\right).$$

**Пример 145.** $\int \operatorname{tg}^7 x\, dx = \int \operatorname{tg}^5 x(\sec^2 x - 1)dx = \int \operatorname{tg}^5 x\, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x\, dx =$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x(\sec^2 x - 1)dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

## 7.9. Интегрирование некоторых иррациональных функций

### 7.9.1. Интегралы вида $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$

($m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ - целые числа).

Подстановка $x = t^s$ ($s$ – наименьшее общее кратное $n_1, n_2, \ldots$).

**Пример 146.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{array}{ll} n_1=2, & x=t^6 \\ n_2=3 & \\ s=6, & dx=6t^5dt \end{array}\right|=\int\frac{t^3\,6t^5}{t^3-t^2}\,dt=$

$$=6\int\frac{t^6}{t-1}\,dt=t^6+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C\,.$$

## 7.9.2. Интегралы вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$

($m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ - целые числа).

Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$ ($s$ – наименьшее общее кратное $n_1, n_2, \ldots$).

**Пример 147.** $\int \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \left| \begin{array}{ll} \frac{1-x}{1+x}=t^2; & x=\frac{1-t^2}{1+t^2}; \\ dx=-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}; & 1-x=\frac{2t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$

$$= -\int \frac{(1+t^2)^2}{4t^4}\cdot t\cdot\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt = -\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}+C=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

## 7.9.3. Интегралы вида $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; $I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

$$I_3 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$I_1$ - выделение полного квадрата.

**Пример148.** $$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C.$$

$I_2$ - выделяется дифференциал в числителе.

**Пример 149.** $\displaystyle\int\frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=$

$$=\frac{3}{2}\int(x^2+2x+2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+2x+2)-4\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

$I_3$ сводится к $I_1$ подстановкой $x=\dfrac{1}{u}$ $dx=-\dfrac{1}{u^2}du$.

**Пример 150.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{u} \\ dx=-\dfrac{1}{u^2}du \end{array}\right|=-\int\frac{udu}{u^2\sqrt{\dfrac{1}{u^2}+\dfrac{2}{u}-1}}=$

$$=-\int\frac{du}{\sqrt{1+2u-u^2}}=-\int\frac{du}{\sqrt{2-(u-1)^2}}=\arccos\frac{u-1}{\sqrt{2}}+C=\arccos\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\sqrt{2}}+C.$$

## 7.9.4. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Частные случаи рассмотрены раньше.

### Тригонометрические подстановки

Приводятся к виду (выделением полного квадрата):

$$I_1=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du;$$

$$I_2=\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du;$$

$$I_3=\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du.$$

$I_1 \quad u = k\sin t \quad (u = k\cos t); \qquad I_1 = \int R(k\sin t, k\cos t)k\cos t\,dt.$

$I_2 \quad u = k\,\mathrm{tg}\,t \quad (u = k\,\mathrm{ctg}\,t); \quad k > 0; \qquad I_2 = \int R(k\,\mathrm{tg}\,t, k\sec t)k\sec^2 t\,dt.$

$I_3 \quad u = k\sec t \quad (u = k\,\mathrm{cosec}\,t);$

$$du = k\frac{\sin t}{\cos t}dt; \; \sqrt{u^2 - k^2} = k\,\mathrm{tg}\,t; \qquad I_3 = \int R(k\sec t, k\,\mathrm{tg}\,t)k\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

Найдите неопределенные интегралы, используя тригонометрические подстановки

**Пример 151.** $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t,\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t \\ dx = a\cos t\,dt \end{array} \right| =$

$$= a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \arcsin\frac{x}{a},\ \cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \\ \sin t = \frac{x}{a} \end{array} \right| = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$