ЛЕКЦИЯ 17

Метод неопределенных коэффициентов

Приведем простейшие дроби к общему знаменателю и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителе. Получим систему m линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения.

Примеры решения задач. Представить правильную дробь в виде суммы простейших дробей

Пример 125. $$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}=$$

$$=\frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 1=A+B \\ x^1 & 0=2A+C-2B \\ x^0 & 0=4A-2C \end{array}\right\} A=\frac{1}{3}\quad B=\frac{2}{3}\quad C=\frac{2}{3}.$$

Ответ. $$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{1}{3(x-2)}+\frac{2(x+1)}{3(x^2+2x+4)}.$$

Пример 126. $\dfrac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}$.

Решение. $\dfrac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}=$

$$=\left|\begin{array}{l} x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-3^2= \\ =(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)=(x-1)(x+3)(x^2+2x+3) \end{array}\right|=$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}=$$

$$=\frac{A(x+3)(x^2+2x+3)+B(x-1)(x^2+2x+3)+(Cx+D)(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}.$$

$$7x^2+26x-9=(A+B+C)x^3+(5A+B+2C+D)x^2+$$

$$+(9A+B-3C+2D)x+9A-3B-3D.$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3 & 0 = A + B + C \\ x^2 & 7 = 5A + B + 2C + D \\ x^1 & 26 = 9A + B - 3C + 2D \\ x^0 & -9 = 9A - 3B - 3D \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1;\ \ B = 1;\ \ C = -2;\ \ D = 5.$$

Ответ. $\dfrac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9} = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{5 - 2x}{x^2 + 2x + 3}.$

Метод частных значений

Задаем $\boldsymbol{x}$ определенное значение и приравниваем левую и правую часть числителя. Особенно удобно это делать, когда корни действительные.

Пример 127. Представить правильную дробь $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ в виде суммы простейших дробей.

Решение. $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\dfrac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-2}=$

$$
=\left|\begin{array}{l}
4x^2+16x-8=A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2) \\
\left.\begin{array}{l|l}
x=0 & -8=-4A \\
x=-2 & -24=8B \\
x=2 & 40=8C
\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=-3 \\ C=5 \end{array}
\end{array}\right| = \frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}.
$$

Часто удобно применять комбинацию методов. Сначала использовать метод частных значений. А потом, сократив систему линейных алгебраических уравнений, применить метод неопределенных коэффициентов.

Правило интегрирования рациональных дробей

1) Для неправильной дроби выделить целую часть

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m.$$

2) Представить $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в виде суммы простейших дробей.

3) Интеграл от рациональной дроби представить в виде интеграла от многочлена и от простейших дробей. Вычислить его.

Примеры решения задач. Найти неопределенные интегралы

Пример 128. $\boldsymbol{I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx}$.

Решение. Подынтегральная функция – неправильная дробь. Выделяем многочлен. Затем раскладываем правильную дробь на сумму простейших дробей и интегрируем.

$$I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$$

$$+\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}\right)dx=\left|\begin{matrix}A=2 & B=-3\\ C=5 & \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x+2}+5\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|-3\ln|x+2|+5\ln|x-2|+\ln C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{Cx^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|.$$

Ответ. $I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{Cx^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|.$

Пример 129. $I=\int\frac{x^2dx}{x^3-8}$.

Решение. $\int\frac{x^2dx}{x^3-8}=\int\frac{x^2dx}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}\right)dx=$

$$=\left|\begin{matrix}A=\frac{1}{3}\\ B=C=\frac{2}{3}\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\int\frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}=\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln(x^2+2x+4)+\ln C=$$

$$=\ln\left|\left(C(x-2)(x^2+2x+4)\right)^{\frac{1}{3}}\right|=\ln\left|\sqrt[3]{C(x^3-8)}\right|.$$

Замечание. Пример 129 можно решить проще методом подведения функции под знак дифференциала

$$\int \frac{x^2dx}{x^3-8} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3-8)}{x^3-8} = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-8\right| + \frac{1}{3}\ln C = \ln\left|\sqrt[3]{C(x^3-8)}\right|.$$

В интегральном исчислении нет общих правил. Интегрирование может быть выполнено не единственным образом. Даже теоретическое правило вычисления может быть не очень удачным.

7.8. Интегрирование тригонометрических выражений

7.8.1. Рациональные функции

Выражение $\boldsymbol{R(u,v,w,\ldots)}$ есть ***рациональная функция*** относительно переменных $\boldsymbol{u,v,w,\ldots}$, если оно получено из любых величин $\boldsymbol{u,v,w,\ldots}$, а также действительных чисел с помощью четырех арифметических действий.

Примеры рациональных функций.

Пример 130. $R(u,v)=\dfrac{\sqrt{2}u^2-3v}{5u^2-6uv+v^2}$ рациональная функция относительно u, v.

Пример 131. $R\left(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x^2}\right)=\dfrac{\sqrt{5}\sqrt[3]{x^2}}{x-\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ рациональная функция относительно $x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x}$.

Пример 132. $R(\sin x,\cos x)=\dfrac{\sin x-2\cos^2 x}{3\sin^2 x+\cos x+1}$ рациональная функция относительно $\sin x,\cos x$.

Примеры функций, не являющихся рациональными.

Пример 133. Функция $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2}$ не является рациональной функцией относительно x.

Пример 134. Функция $\dfrac{\sqrt{\sin x}+2\cos^2 x}{\sin^2 x+3\cos x+5}$ не является рациональной функцией относительно $\sin x$.

7.8.2. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

7.8.2.1. Преобразование подынтегрального выражения

Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ при условии, что он не является табличным. Иногда достаточно преобразовать подынтегральное выражение.

Пример 135. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x} dx +$

$+ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C$.

Пример 136. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

Пример 137. $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$.

7.8.2.2. Универсальная тригонометрическая подстановка $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

Подынтегральное выражение преобразуется в рациональную функцию от t.

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=2\operatorname{arctg}t \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$.

Удобно вычислять интегралы вида $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$.

Пример 138.

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} = \left| t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+2t+17} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+16} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{4} + C.$$

Универсальная подстановка часто приводит к громоздким вычислениям. Можно использовать частные подстановки.

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ - нечетная относительно $\sin x$.

Подстановка $\cos x = t$.

Пример 139. $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t,\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1 \\ \sin^2 x = 1 - t^2, \quad dt = -\sin x dx \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1} = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1} = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{2t^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left| \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1} \right| + C.$$

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ - нечетная относительно $\cos x$.

Подстановка $\sin x = t$.

Пример 140. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{\cos^2 x(1 + \cos^2 x)\cos x dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)dt}{t^2 + t^4} =$$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1 + t^2} \right) dt = t - \frac{2}{t} - 6\,\mathrm{arctg}\, t + C = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\,\mathrm{arctg}(\sin x) + C.$$

3) $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ - четная относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Подстановка $\mathrm{tg}\, x = t$.