# ЛЕКЦИЯ 16

## Подведение множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du.$$

Если интеграл $\int f(u)du$ - табличный, его вычисляют непосредственно.

Здесь используют свойства сложной функции

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b) = \frac{1}{a}du \qquad u = ax+b;$$

$$x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3) = \frac{1}{3}du \qquad u = x^3;$$

$$x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}d(x^\alpha) = \frac{1}{\alpha}du \qquad u = x^\alpha;$$

$$\sin x dx = -d(\cos x) = -du \qquad u = \cos x;$$

$$xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}d\left(e^{x^2}\right) = \frac{1}{2}du \qquad u = e^{x^2};$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d(\sqrt{x}) = 2du \qquad u = \sqrt{x}.$$

**Примеры решения задач.** Найти неопределенные интегралы

**Пример 113.** $\int\sqrt{1+x^2}\,xdx = \left|xdx = \frac{1}{2}d(1+x^2)\right| = \frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2) =$

$$= \left|(1+x^2) = u\right| = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C.$$

**Пример 114.** $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+5\cos x}} = \left| \begin{array}{l} \sin x dx = -\frac{1}{5} d(1+5\cos x) \\ 1+5\cos x = u \end{array} \right| =$

$$= -\frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{5}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{5}\sqrt{1+5\cos x} + C.$$

Вычисление $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\varphi(x)| + C$

**Пример 115.** $\int \mathrm{tg}\, x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

$$\int \mathrm{ctg}\, x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

## Интегрирование по частям

Следует из формулы $d(uv) = udv + vdu$; $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$.

$$\int d(uv) = uv + C; \qquad \int udv = uv - \int vdu.$$

**Пример 116.** $\int x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$

$$= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

За $\boldsymbol{u}$ принимают то, от чего хотим и от чего можно избавиться.

**1.** Интегралы вида $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$,

$$\int P_n(x)\cos kxdx,$$

где $P_n(x)$ - многочлен $n$-степени.

Приняв за $u = P_n(x)$ применим $n$ раз метод интегрирования по частям и избавимся от многочлена.

**2.** $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$,

$$\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\, xdx, \qquad \int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\, xdx.$$

Здесь $u = \ln x$, $u = \arcsin x$, $u = \mathrm{arctg}\, x$ и т.д. После дифференцирования эти функции исчезнут.

**3.** $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, ($a,b$ – числа).

Интегралы вычисляются двукратным интегрированием.

**Пример 117.** $$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=e^{-x} & du=-e^{-x}dx \\ dv=\cos\frac{x}{2}dx & v=2\sin\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=e^{-x} & du=-e^{-x}dx \\ dv=\sin\frac{x}{2}dx & v=-2\cos\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}-4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx.$$

Перенесем интеграл из правой части равенства в левую и получим

$$5\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{-x} \cos\frac{x}{2}dx = \frac{2}{5}e^{-x}\left(\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\right) + C.$$

## 7.5. Рациональные дроби

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

$n \geq m$ - неправильная дробь,

$n < m$ - правильная дробь.

**Пример 118.** $\dfrac{2x^5}{2x^2 + 3x + 2}$ $n \geq m$ неправильная дробь.

**Пример 119.** $\dfrac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 - 1}$ $n < m$ правильная дробь.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби, разделив числитель на знаменатель столбиком $\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)} = R_l(x) + \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

**Пример 120.** $\dfrac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2} = x^2 - 2x + \dfrac{4x + 1}{x^2 + x + 2}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + 1 & x^2 + x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + x^3 + 2x^2} & x^2 - 2x \\
\quad -2x^3 - 2x^2 + 1 & \\
\quad \underline{-2x^3 - 2x^2 - 4x} & \\
\qquad\qquad 4x + 1 &
\end{array}
$$

Интегрирование многочленов не представляет затруднений. Рассмотрим интегрирование правильных дробей.

## 7.6. Интегрирование простейших рациональных дробей

***Простейшие правильные дроби***:

**1)** $\dfrac{A}{x-a}$, **2)** $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n \geq 2)$, **3)** $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, **4)** $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n \geq 2)$,

где $A, a, p, q, M, N$ - действительные числа.

Квадратный трехчлен в знаменателе действительных корней не имеет $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$.

**1)** $$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

**2)** $$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

**3)** $$\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{array}{l} d(x^2+px+q) = (2x+p)dx \\ Mx+N = \dfrac{M}{2}(2x+p) + N - \dfrac{Mp}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\cdot \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + q - \dfrac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{\left(N - \dfrac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

**Пример 121.** $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+3} = \left|(x^2+2x+3)' = 2x+2\right| =$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+1}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} + \int \frac{dx}{x^2+2x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

**4)** $$\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}=\left|\begin{array}{l} x+\dfrac{p}{2}=t \quad dx=dt \quad a^2=q-\dfrac{p^2}{4} \\ x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}=t^2+a^2 \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{M\left(x+\dfrac{p}{2}\right)+N-\dfrac{Mp}{2}}{\left(\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}\right)^n}dx=M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=M\cdot I_0+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot I_n.$$

$$I_0=\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2)=\frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+C.$$

$$I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right)=\frac{1}{a^2}\left(I_{n-1}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right).$$

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}=\left|\begin{matrix}u=t & du=dt\\ dv=\dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^n} & v=\dfrac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{t}{2(1-n)(t^2-a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(1-n)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}=$$

$$=\frac{t}{2(1-n)(t^2-a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}.$$

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}-\frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\right)$$ - рекуррентная формула.

Зная $I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$, получим $I_2$ и т.д.

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + a^2} + \frac{t}{2(t^2 + a^2)} \right) =$$

$$= \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

## 7.7. Интегрирование рациональных дробей

Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде конечной суммы простейших дробей 1-4 типов. Для этого необходимо разложить знаменатель на линейные и квадратичные множители, для чего необходимо решить уравнение

$$Q_m(x) = 0 \Leftrightarrow b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0 = 0.$$

Уравнение имеет $\boldsymbol{m}$ корней с учетом их кратности.

**Теорема 7.4.** Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$,

где $Q_m(x) = (x-\alpha)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^s \cdot \ldots$,

можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s} + \ldots,$$

где $A_1, \ldots A_k, \ldots M_1, N_1, \ldots M_s, N_s, \ldots$ - действительные числа.

Разложить на простейшие дроби следующие функции

**Пример 122.** $$\frac{x^2}{(x^3-8)(x^2+1)}=\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)(x^2+1)}=$$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

**Пример 123.** $$\frac{2x-3}{(x+1)(x-1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

**Пример 124.** $$\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)^2x^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+\frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}+\frac{G}{x}+\frac{M}{x^2}+\frac{N}{x^3}$$

Теперь нужно определить коэффициенты разложения.